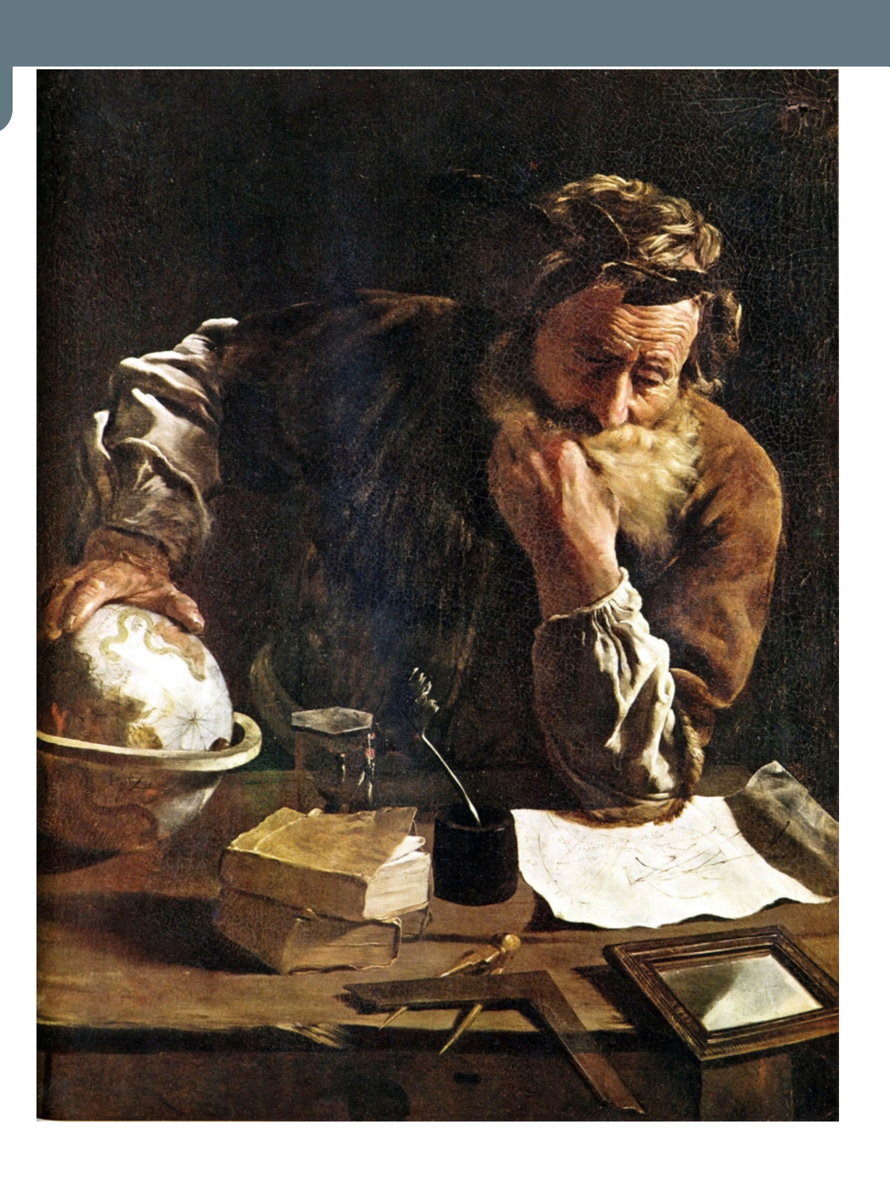
ISBN 978-987-688-077-0



ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Graciela Recabarren, Carlos Marchesini, Susana Panella, Silvia Butigué, Silvia Cabrera, Nancy Scattolini, Sonia Curti, Martha Lardone, Susana Mussolini y María Inés Herrera

Análisis matemático I / Graciela Recabarren ... [et.al.]. - 1a ed. - Río Cuarto : UniRío Editora, 2014.
E-Book.

ISBN 978-987-688-077-0

1. Matemática. 2. Análisis Matemático. I. Recabarren, Graciela
CDD 515

Fecha de catalogación: 03/09/2014

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Graciela Recabarren, Carlos Marchesini, Susana Panella, Silvia Butigué, Silvia Cabrera, Nancy Scattolini, Sonia Curti, Martha Lardone, Susana Mussolini y María Inés Herrera

2014 © UniRío editora. Universidad Nacional de Río Cuarto
Ruta Nacional 36 km 601 – (X5804) Río Cuarto – Argentina
Tel.: 54 (358) 467 6309 – Fax.: 54 (358) 468 0280
editorial@rec.unrc.edu.ar - www.unrc.edu.ar/unrc/comunicacion/editorial/

Primera edición: *Septiembre de 2014*

ISBN 978-987-688-077-0

Ilustración de tapa: *"Arquímedes"*. Domenico Fetti. 1620

Presentación de Análisis Matemático I

Los contenidos que veremos en esta asignatura, te permitirán utilizar la matemática en la descripción, análisis y resolución de problemas en el área de las Ciencias Económicas.

Comprobarás que la matemática te brinda herramientas muy útiles para la selección y organización de la información necesaria para la toma de decisiones.

Disponer de información no es un problema en los tiempos que vivimos. La dificultad se presenta cuando necesitamos analizar ese cúmulo de información, seleccionar la que realmente aporta datos útiles, ordenarla y relacionarla de manera que nos oriente acerca del problema que queremos resolver.

La vida cotidiana nos enfrenta permanentemente a situaciones que requieren tomar una decisión respecto de algo. A diario debemos evaluar distintas alternativas para poder optar por la que, en el contexto en que se presenta, aparenta ser la más conveniente.

El ANÁLISIS MATEMÁTICO nos ayudará en situaciones en las que, por ejemplo, queramos evaluar la relación que existe entre *ingresos de un fabricante con las cantidades* vendidas o *costos de fabricación con beneficios obtenidos* o *precio de un artículo con su demanda, etc.*

Dado que las Ciencias Económicas, frecuentemente tratan conceptos de naturaleza cuantitativa, como lo son los precios, salarios, utilidades, etc., es indudable que gran parte del análisis económico será ineludiblemente matemático.

Los contenidos de la asignatura contemplan tres bloques temáticos, denominados:

RELACIONES FUNCIONALES

LÍMITE y CONTINUIDAD

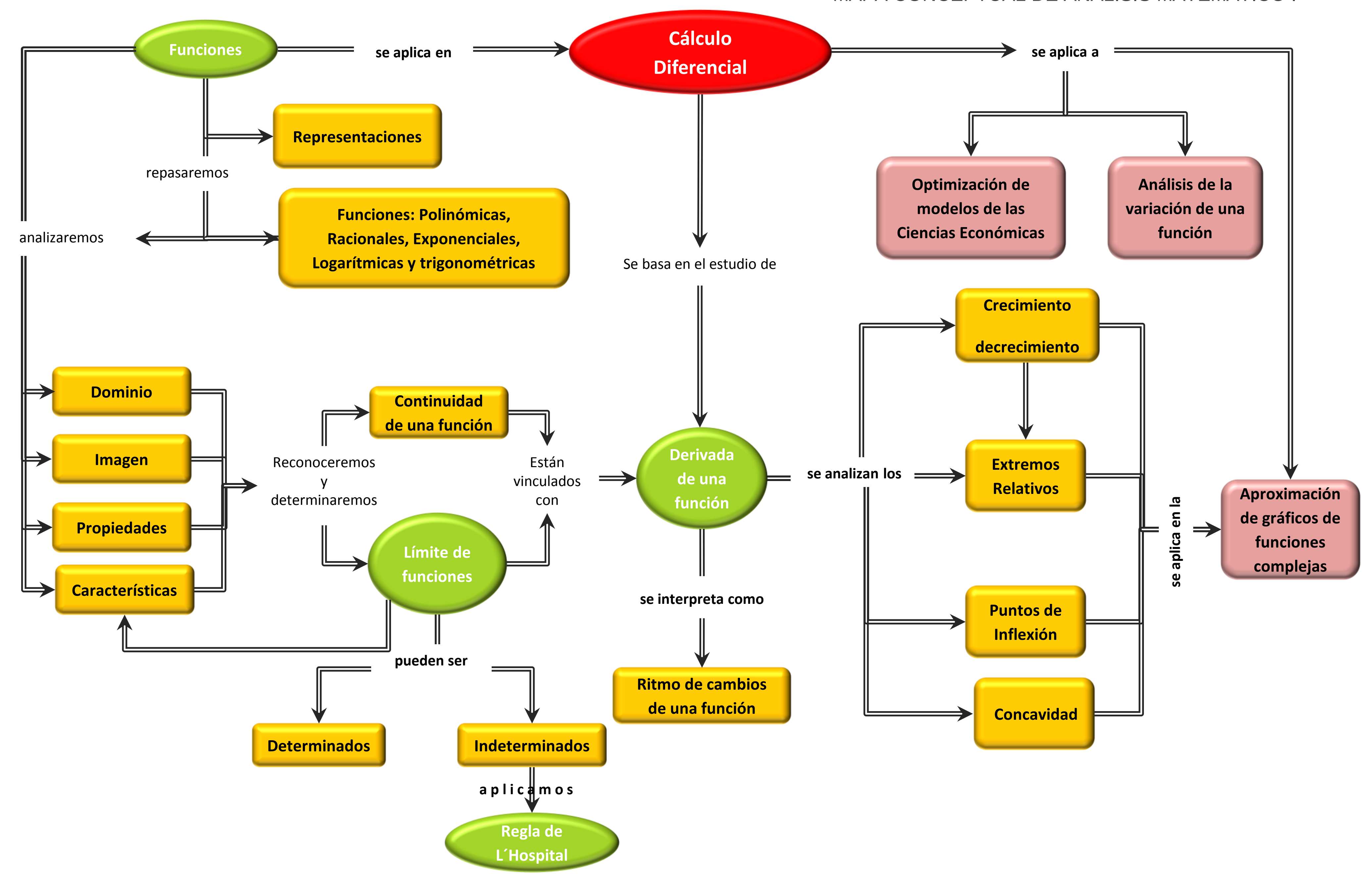
CÁLCULO DIFERENCIAL

El primer bloque comprende lo que llamamos matemáticas previas al cálculo ó simplemente PRE-CÁLCULO que incluye conceptos que en su mayoría han sido estudiados en la Escuela Secundaria. Nos referimos en esta primera parte a un eje estructurante de la asignatura que es el conocimiento de distintos tipos de Funciones que permiten la modelización matemática de situaciones que están relacionadas con las Ciencias Económicas: construcción del modelo y/o análisis dentro del modelo e interpretación de conclusiones matemáticas que den respuesta a situaciones planteadas.

Considerando que el análisis matemático gira en torno al cambio, movimiento o variación, iniciamos estos conceptos con el segundo bloque temático: LÍMITE y CONTINUIDAD. La noción de límite es de vital importancia, pues es la base sobre la que se desarrolla la teoría del CÁLCULO DIFERENCIAL que es el tercer bloque de contenido que estudiaras en Análisis Matemático I. A través del cálculo podremos resolver problemas relativos a la maximización de utilidades o a la minimización de los costos, analizar las tasas de crecimiento de desempleo, la rapidez con que se incrementan los costos, entre otras múltiples aplicaciones de interés.

A continuación te presentamos de manera gráfica el conjunto de ideas y conceptos enlazados que estudiaremos en Análisis Matemático I.

MAPA CONCEPTUAL DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I



UNIDAD I: FUNCIONES

Índice

Unidad I: Funciones

Unidad I

En esta unidad abordaremos el análisis de las relaciones que surgen entre variables, fundamentalmente las que reflejan situaciones que se dan en las Ciencias Económicas. Las estudiaremos a partir de sus distintas representaciones: algebraicas, tabla de valores, gráficas o expresiones coloquiales. Para visualizar sus comportamientos, esbozaremos sus gráficos, identificando intervalos de crecimiento o decrecimiento, intervalos en los cuales asumen valores positivos, negativos o nulos e identificando valores extremos.

La unidad se ubica dentro del bloque temático: **RELACIONES FUNCIONALES**.

La particularidad que presenta su tratamiento en esta asignatura, es su aplicación en la resolución de problemas de las Ciencias Económicas.

A partir de situaciones sencillas que pueden presentarse en la vida real, comenzaremos reconociendo que existen variables que muestran alguna **relación** de dependencia entre ellas.

Luego centraremos el estudio en aquellas relaciones especiales que se denominan **funciones**. El concepto de función es un pilar del análisis matemático. Aprenderemos la simbología adecuada para representar funciones, analizaremos sus dominios e imágenes, e interpretaremos sus comportamientos gráficos.

Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra. Por ejemplo, el costo de producir un artículo depende del número de artículos producidos o la cantidad de cierto artículo que el fabricante ofrecerá dependerá del precio que se le otorgue.

Por último, se presentará una clasificación de las funciones que aparecen asiduamente en los problemas relacionados con las Ciencias Económicas.

Para abordar con éxito esas aplicaciones se deberán tener presente los conocimientos aprendidos en la escuela secundaria como son: el conjunto de los números reales, sus propiedades y operaciones fundamentales, ecuaciones, polinomios, factorización de expresiones racionales, y propiedades de exponentes y radicales.

Objetivos

General:

Analizar funciones de Ciencias Económicas aplicando los distintos conceptos involucrados en el estudio de funciones.

Específicos:

- ✓ **Reconocer características y propiedades, como crecimiento y/o decrecimiento, simetrías, entre otros en diferentes representaciones de funciones.**
- ✓ **Identificar dominio e imagen.**
- ✓ **Graficar funciones.**
- ✓ **Interpretar gráficas.**
- ✓ **Transformar funciones: combinarlas, componerlas, desplazarlas y reflejarlas.**
- ✓ **Interpretar conclusiones matemáticas en situaciones aplicadas a las Ciencias Económicas**

1.1. Concepto de Relación.

Observando nuestro entorno, es fácil apreciar que los números invaden todos los dominios de nuestra actividad.

En cada fenómeno que pretendemos analizar, surgen valores o cantidades que serán de utilidad considerar.

Muchas resultarán ser relevantes, otras, quizás no tanto. Algunas mostrarán cierta dependencia respecto de otras, demostrando alguna "relación" entre ellas, por ejemplo:

El peso promedio está relacionado con la altura del individuo.

El número de cajas que habilita un supermercado está relacionado con la cantidad de personas que se encuentran en su recinto.

Comenzaremos destacando que una Función o Relación Funcional, como su nombre lo indica es un tipo especial de RELACIÓN.

Una relación muestra una **dependencia** entre dos conjuntos, usualmente llamados de **partida** y de **llegada**.

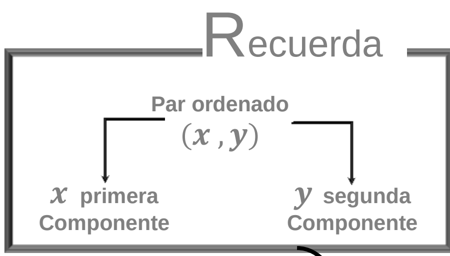
El conjunto de llegada lo conforman las cantidades que dependen de las cantidades del conjunto de partida.

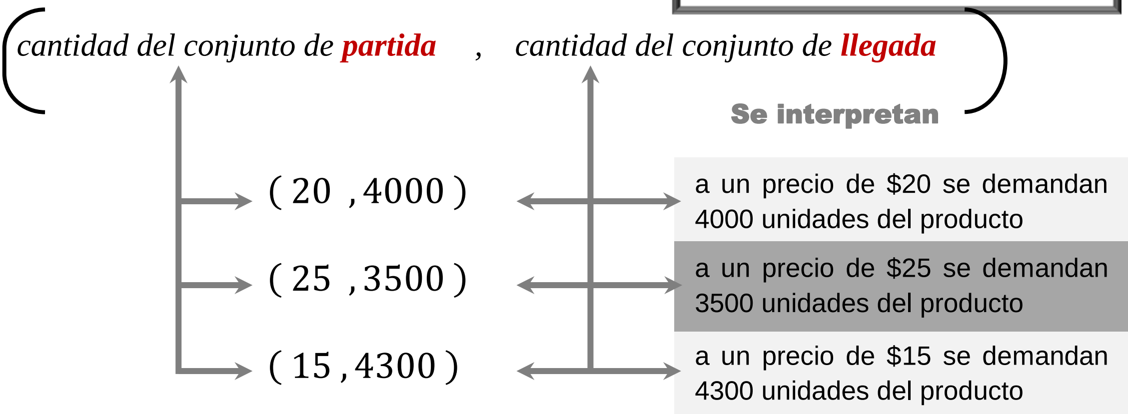
En particular recordaremos, aquellas relaciones entre conjuntos numéricos y más precisamente, aquellas en que los conjuntos de salida y llegada son los números reales.

Ejemplo 1: la **relación** entre la cantidad que se demanda de un producto **depende** del precio del producto.

Así, el conjunto de **partida** está constituido por el **precio** del producto y el de **llegada** por las **cantidades demandadas**.

Cuando se relacionan dos cantidades, como ocurre con el ejemplo anterior, una forma de expresar tal relación es mediante **pares ordenados** de la forma:





Ejemplo 2: El monto de impuestos que se tributa depende del ingreso del contribuyente.

Si deseáramos vincular dos elementos de esta relación: ingreso con monto de impuestos, por ejemplo podríamos escribir $(2000, 45)$; $(3000, 50)$; $(4000, 60)$.

Dominio de una Relación:

El conjunto de los primeros componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación, constituye el DOMINIO de la relación y se simboliza entre llaves.

De este modo, los Dominios de los ejemplos 1 y 2 anteriores son respectivamente:

$Dom\ Relación\ del\ Ejem.1 = \{20, 25, 15, \dots\}$
todas las cantidades posibles de **precios**

$Dom\ Relación\ del\ Ejem.2 = \{2000, 3000, 4000, \dots\}$
todas las cantidades posibles de **ingresos**

Imagen de una Relación:

El conjunto de los segundos componentes de los pares ordenados de la relación, constituye la IMAGEN o RANGO de la relación.

De este modo los conjuntos imágenes de la relación anterior son:

$Imag\ Relación\ del\ Ejem.1 = \{4000, 3500, 4300, \dots\}$ $Imag\ Relación\ del\ Ejem.2 = \{45, 50, 60, \dots\}$

todas las cantidades posibles de **productos demandados**

todos los montos de **impuesto que corresponden a cada ingreso**

Así, matemáticamente una

Relación:

es la correspondencia entre un primer conjunto, llamado de **partida**, con un segundo conjunto, llamado **de llegada**, de manera que a **cada elemento** del conjunto de partida le corresponde uno o más elementos del conjunto de llegada.

Función:

Si una relación es tal que **a cada** elemento del **dominio** le corresponde **uno y sólo uno** del conjunto de **llegada,** la relación se denomina **RELACIÓN FUNCIONAL**, o simplemente **FUNCION.**

Para Reflexionar:

A partir de las definiciones de Relación y Función expuestas anteriormente: ¿Podrías explicar la diferencia entre una relación y una función?. ¿Necesariamente el conjunto de llegada de una función coincide con la Imagen de la función?

1.2. Definición. Notación. Representaciones.

Se llama FUNCIÓN o relación funcional de un conjunto A en un conjunto B, a toda relación de A en B que cumple con:

- ✓**El dominio de la relación coincide con el conjunto de partida**
- ✓**A cada elemento del dominio le corresponde exactamente un solo elemento del conjunto de llegada.**

Observación:

De lo anterior se puede deducir que **todas** las **funciones** son **relaciones**, pero **no** todas las **relaciones** son **funciones**

Por la definición de una función, cada número del dominio determina **uno y sólo** un número en la imagen. Pero varios números diferentes del dominio pueden determinar el mismo número en la imagen.

Generalizando, podemos decir que una función es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto **A**, un único elemento y perteneciente a un segundo conjunto **B**.

Recuerda

Como el valor de y depende de la elección de x, se denominan a:

x : variable independiente

e

y : variable dependiente

Notación:

El diccionario define NOTACIÓN como un conjunto de signos convencionales adoptados para expresar ciertos conceptos matemáticos, químicos, etc.

En el caso específico de las funciones, por lo general se utilizan algunas letras para representar a las variables: $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ **,** y otras letras como f, g, h, z, ... para representar la relación de dependencia, denotándose de esta manera.

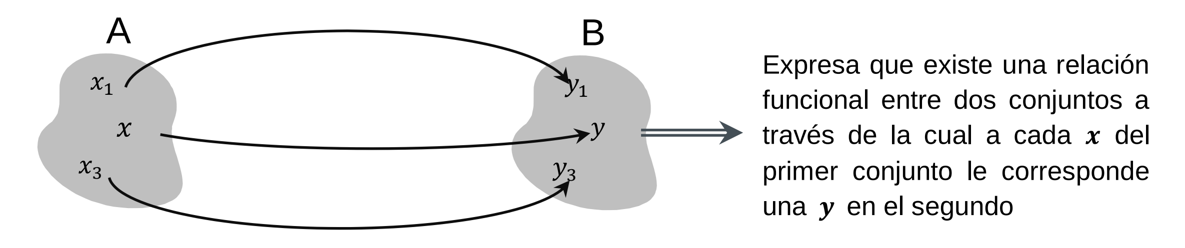
$$y = f(x) \qquad \text{ó} \qquad z = g(t)$$

Representaciones:

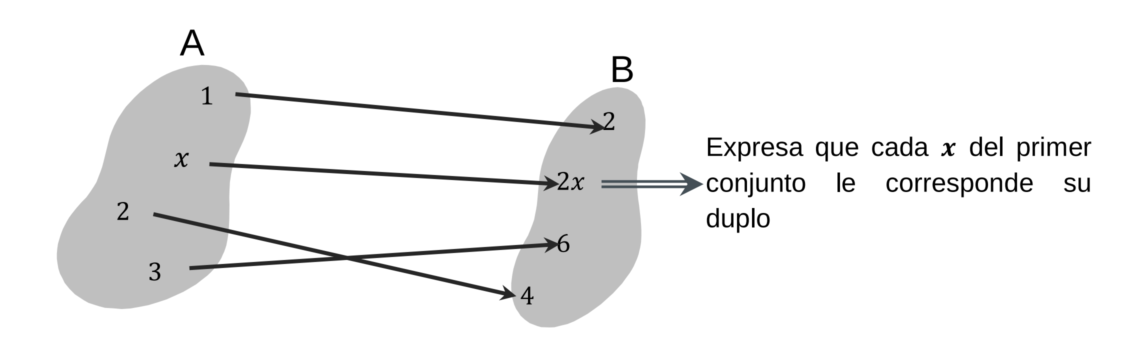
A las funciones se las puede representar de diferentes formas mediante: diagramas de Venn o sagital, tabla de valores, gráficos y en algunos casos mediante una fórmula o expresión algebraica.

Mediante Diagramas de Venn:

A veces resulta conveniente representar una función mediante un diagrama de flechas llamado sagital. En este caso, se dibujan los conjuntos **A** y **B** y se conectan mediante flechas los elementos de cada par ordenado de la relación. Así, por ejemplo:



Otro ejemplo.



Sin embargo las representaciones más usuales para una **Función** son:

Por Tablas:

La relación entre dos magnitudes se puede expresar mediante una tabla de valores. Veamos un ejemplo en el que a través de una tabla de datos se refleja una función entre dos conjuntos.

En el año 2013, el Ministerio de Administración y Presupuesto de un determinado país hizo las siguientes estimaciones para futuros costos de medicina social (en miles de millones de dólares):

A cada año le corresponde un costo de medicina social determinado.

Tiempo transcurrido (Año)	**Costos (miles de dólares)**
2014	250
2015	270
2016	350
2017	400

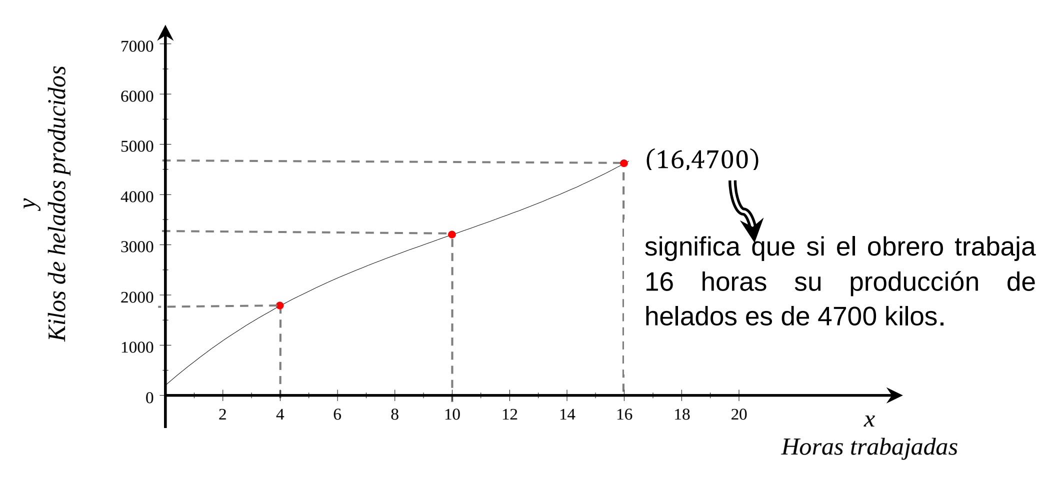
$\Longrightarrow$ $(2014,250)$ significa que en el año 2014 ese país tendrá un costo en medicina social de 250 mil dólares.

$\Longrightarrow$ $(2017,400)$ significa que en el año 2017 ese país tendrá un costo en medicina social de 400 mil dólares.

El costo en medicina social está en función de los años transcurridos. La variable independiente es el tiempo transcurrido (años) y la dependiente corresponde al costo en medicina social (miles de dólares).

Por Gráficas:

Por ejemplo supongamos que una función viene dada por la siguiente gráfica:



La representación gráfica de una función permite visualizar de un modo claro y preciso su comportamiento. El conjunto de los pares ordenados (x, y) determinados por la función recibe el nombre de *gráfica* de la función. Los pares ordenados (x, y) que pertenecen a la función, se representan en un sistema de ejes cartesianos, que consiste en dos ejes perpendiculares que se cortan en un punto, llamado origen de coordenadas, y representado por el número 0; el eje horizontal recibe el nombre de *eje de abscisas*, y en él se representan los valores de la variable independiente; el eje vertical recibe el nombre de *eje de ordenadas*, y en él se representan los valores de la variable dependiente. Cada par ordenado corresponde a un punto del plano. Uniendo todos los puntos, se obtiene la gráfica de la función.

Frecuentemente, en las situaciones contables y administrativas, las variables asumen valores enteros, pero la teoría económica indica que es conveniente suponer que asumen valores reales (variables continuas) para su análisis.

Por medio de Expresiones Algebraicas:

Una expresión algebraica es un conjunto de números y letras unidos mediante las operaciones aritméticas.

Podemos escribir la relación entre dos magnitudes con una expresión algebraica, combinando letras, números y signos aritméticos.

$\boxed{y = f(x)}$ es la expresión general de una **función** o **ecuación de una función**.

Por Ejemplo:

$$y = 2x$$

indica**: multiplique al valor de** x **por 2 para obtener** y

Las funciones representadas por expresiones algebraicas son las más utilizadas en matemática.

Teniendo una función representada por algunas de expresiones anteriores, se pueden obtener las demás.

A continuación te presentamos un ejemplo que muestra como pasamos de una función representada por una tabla de valores a su representación por una expresión algebraica.

La Tabla siguiente representa la relación entre los kilos de helado vendidos en una boca de expendio, según las temperaturas promedio registradas en un determinado lugar:

Temperaturas Promedio (en grados)	**Helados Vendidos (en kilos)**
30	1000
34	1120
26	880
22	760

Si denotamos con $k = kilos\ vendidos$ y $t = temperatura$, observamos que para obtener los valores de la segunda columna debimos efectuar “algunas operaciones” a los valores de la primera columna.

No siempre resulta sencillo deducir la fórmula o ecuación a partir de una tabla de datos, pero en la mayoría de los problemas que analizaremos en este curso, la fórmula viene dada como dato.

En este caso la fórmula o expresión algebraica que representa la anterior tabla, es:

Expresión Algebraica:

$$K(t) = 30.t + 100$$

Esta regla de correspondencia constituye el corazón de la función.

Esta expresión algebraica indica la relación que existe entre las temperaturas promedios registradas del conjunto inicial su correspondiente cantidad de kilos de helado vendidos $K(t)$ del conjunto final. La obtención de la expresión algebraica nos facilitará analizar su dominio, su imagen, su comportamiento gráfico.

Observa que a partir de la expresión algebraica de la función: “Kilos de helados vendidos” podemos reconstruir la tabla de valores. Así,

Para $t = 30$ obtenemos $K(30) = 30.30 + 100 = 1000$

Para $t = 34$ obtenemos $K(34) = 30.34 + 100 = 1120$

Para $t = 26$ obtenemos $K(26) = 30.26 + 100 = 880$

Para $t = 22$ obtenemos $K(22) = 30.22 + 100 = 760$

Recuerda

$t = 30$; $t = 34$; $t = 26$; $t = 22$, son las preimágenes por K de 1000; 1120; 880; 760 respectivamente

En la expresión algebraica que define una función, el papel de la variable independiente es el “espacio a llenar”: $K(\square) = 30\,\square + 100$.

Por ejemplo, si queremos determinar la cantidad de kg. vendidos cuando la temperatura es de 15 grados , bastaría colocar 15 en el espacio planteado en la igualdad anterior:

$K(15) = 30.15 + 100 = 550$ $\Longrightarrow$ 15 es la preimagen por K de 550.

Dominio e Imagen.

Cuando establecimos el dominio de una relación, lo reconocimos como el conjunto de elementos del conjunto de partida que están asociados con alguno de los elementos del conjunto de llegada.
El mismo razonamiento es válido para definir el dominio de una función, ya que sabemos que una función es simplemente una relación que cumple con determinados requisitos.

Se llama DOMINIO de definición o simplemente dominio de una función al conjunto de valores de la variable independiente para los cuales la función existe y se lo denota por $\boldsymbol{Dom\, f}$

Para establecer el dominio de una función, se deberá considerar:

- **El Contexto del Problema:** por ejemplo si la variable independiente es la edad de una persona, se puede decidir limitar el dominio a valores mayores que 0 pero menores a 120 años.
- **La propia Decisión de quien propone el Análisis:** si a un investigador le interesa analizar particularmente, comportamientos de los adolescentes, es probable que circunscriba su análisis a personas comprendidas entre 12 y 16 años.
- **Las Limitaciones analíticas de la Expresión Algebraica:** cuando la función f, relaciona dos conjuntos de números y solo disponemos de la fórmula o expresión algebraica que representa la relación entre las dos variables, el dominio de f **es el conjunto más grande de números para el cual la expresión tiene sentido**. Es decir el conjunto de valores de x para los cuales se pueden efectuar las operaciones que dan lugar a la transformación $x \to f(x)$.

Esta última consideración es la que vamos a utilizar mayormente en esta unidad.

Ejemplo 3: Sea $f(x) = x^2$. En este caso, el conjunto más grande de valores que puede asumir la variable x, es el propio conjunto de números reales, ya que cualquier valor real de x elevado al cuadrado dará como resultado otro número real. De este modo escribimos: $Dom\, f = \{x / x \in IR\} = (-\infty\, , +\infty)$

Muchas funciones están definidas para todos los reales, como el ejemplo anterior pero en los casos que no sea así, para obtener el dominio de una función se puede proceder por exclusión. Es decir, preguntarse: **¿dónde no está definida?, ¿para qué números no pueden efectuarse las operaciones indicadas por f?**

Ejemplo 4: Sea $f(x) = \sqrt{x}$. En este ejemplo, el conjunto más grande de valores que puede asumir la variable x, es el conjunto de los reales mayores o iguales a cero, ya que no existe dentro del conjunto de números reales, la raíz cuadrada de un número negativo. La regla no tendría sentido para los reales negativos y si para el 0 y los reales positivos. De este modo escribimos:

$$Dom\, f = \{x/x \in IR \geq 0\} = [0, +\infty)$$

Generalizando la restricción del dominio por la $\sqrt{}$:

Sí $f(x) = \sqrt[n]{x} \begin{cases} cuando\ n\ es\ impar\ la\ función\ está\ definida\ \forall x \in IR \\ cuando\ n\ es\ par\ está\ definida\ \forall x \geq 0 \end{cases}$

Ejemplo 5: Sea $f(x) = \frac{8}{\sqrt[3]{x}}$. En este ejemplo, el conjunto más grande de valores que puede asumir la variable x, es el conjunto de los reales menos el cero, ya que no existe dentro del conjunto de números reales, la división por cero. De este modo escribimos:

$$Dom\, f = IR - \{0\}$$

Generalizando la restricción del dominio de una función cuya variable integra el denominador:

Sí $f(x) = \frac{k}{g(x)}, con\ k = constante, entonces\ el\ Dom\ f = \{x/x \in IR\ y\ g(x) \neq 0\}$

Ejemplo 6: Sea $f(x) = \frac{100.000-50x}{1000+x}$. Observemos que $100.000 - 50x$ no presenta ninguna restricción, pues si multiplicamos por -50 a cualquier número real x, obtenemos otro número real y si a este le sumamos 100.000, sigue siendo un número real. Luego, el Dominio del numerador sería: todo IR. En el caso del denominador ocurriría lo mismo. Pero el hecho que estamos en presencia de una división debemos excluir aquellos valores que hacen cero al denominador. Es decir, buscamos los x tal que $1000 + x \neq 0$.

Para encontrar esos valores planteamos la siguiente ecuación y despejamos x, así: $1000 + x = 0 \leftrightarrow x = -1000$. Luego, el:

$$Dom\ f = IR - \{-1000\}$$

Generalizando la restricción del dominio en cociente de funciones:

Sí $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ su DOMINIO es la intersección (parte común) de los dominios de $f(x)$ y $g(x)$, **excluyendo** los valores para los cuales $g(x) = 0$

Hasta aquí hemos presentado DOMINIOS cuyas limitaciones están establecidas solamente por las expresiones algebraicas involucradas. Ahora te mostraremos dominios que a las restricciones anteriores se le agrega el CONTEXTO DEL PROBLEMA.

En Administración, las funciones de **producto-intercambio** dan la relación entre cantidades de dos artículos que pueden ser producidos por la misma máquina o fábrica. Por ejemplo, una bodega puede producir vino rojo, vino blanco o una combinación de los dos. El siguiente ejemplo analiza una función de producto-intercambio.

Ejemplo 7: La función de **producto-intercambio** de la bodega: Uva Dorada para vino rojo: x y vino blanco: y, en toneladas, es:

$$y = f(x) = \frac{100.000 - 50x}{1000 + x}.$$

Si sólo consideraríamos las restricciones que imponen las operaciones que intervienen en la expresión algebraica procederíamos de la siguiente forma:

Dominio del numerador y denominador: todos los reales, excluyendo los valores que hacen cero al denominador. Luego, como $1000 + x \neq 0$, entonces $x \neq -1000$. Así el $Dom\ f(x) = IR - \{-1000\}$ sin tener en cuenta el contexto.

Observemos que el **contexto del problema** restringe los valores de la variable independiente y dependiente a los reales positivos o cero. Es decir que $x \geq 0$ y $f(x) \geq 0$. Luego debemos plantear que:

$$\frac{100.000 - 50x}{1000 + x} \geq 0$$

Para que un cociente sea cero, el numerador debe ser cero y para que un cociente sea mayor que cero, tanto el numerador como el denominador deben ser ambos mayores que cero o menores que cero. Pero como dijimos $x \geq 0$, entonces $1000 + x$ siempre es mayor que cero para cualquier real, sólo nos queda por examinar cuando $100.000 - 50x \geq 0$. Lo que lo planteamos así:

Recuerda

Dados dos números reales a y b, con $b \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \geq 0$$

Si $(a \geq 0 \text{ y } b > 0)$ o $(a \leq 0 \text{ y } b < 0)$

$$100.000 - 50x \geq 0, \text{ con } x \geq 0$$

$$-50x \geq -100.000$$

$$x \leq \frac{-100.000}{-50}$$

$$x \leq 2000$$

Luego, la intersección entre $x \geq 0$ y $x \leq 2000$, nos da que el

$$\boxed{Dom\, f = [0{,}2000]}$$

Como observamos a través del ejemplo anterior, el **contexto del problema** complica aún más la determinación del DOMINIO de una función. Pues nos requiere examinar también la variable DEPENDIENTE o sea $f(x)$. Los valores que obtenemos a través de la fórmula, constituyen la **imagen** de la función.

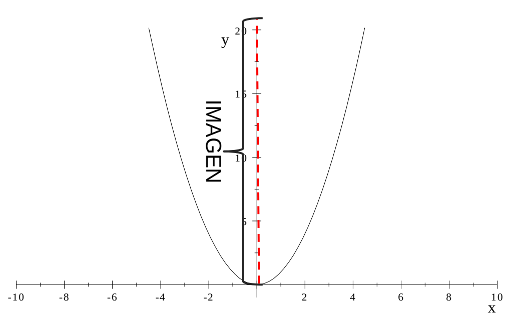
Imagen:

Se llama IMAGEN de una función al conjunto de todos los valores de la variable DEPENDIENTE. Son los valores $f(x)$, que dependen de los valores que pueda asumir x y se lo denota por $Im\, f$

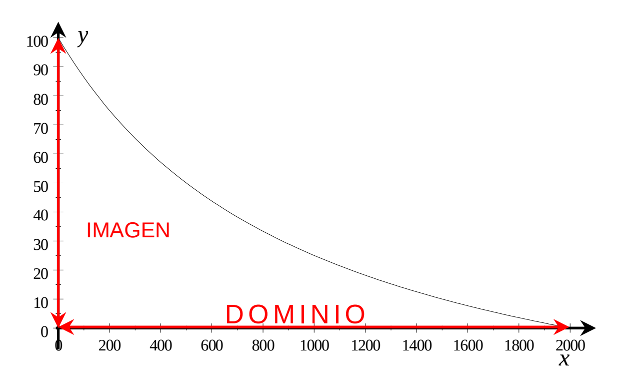
Es decir la imagen es el conjunto formado por todos los elementos de LLEGADA obtenidos a partir de aplicar la regla a los elementos de PARTIDA.

Encontrar la imagen de una función analíticamente, tal como lo hicimos en el caso de los dominios, no es sencillo. Por ello, en Análisis Matemático I la obtendremos a través de los gráficos de la función en los casos en que podamos contar con ellos.

Ejemplo 8: Sea $f(x) = x^2$. Por el gráfico: $Im\, f = [0, +\infty)$

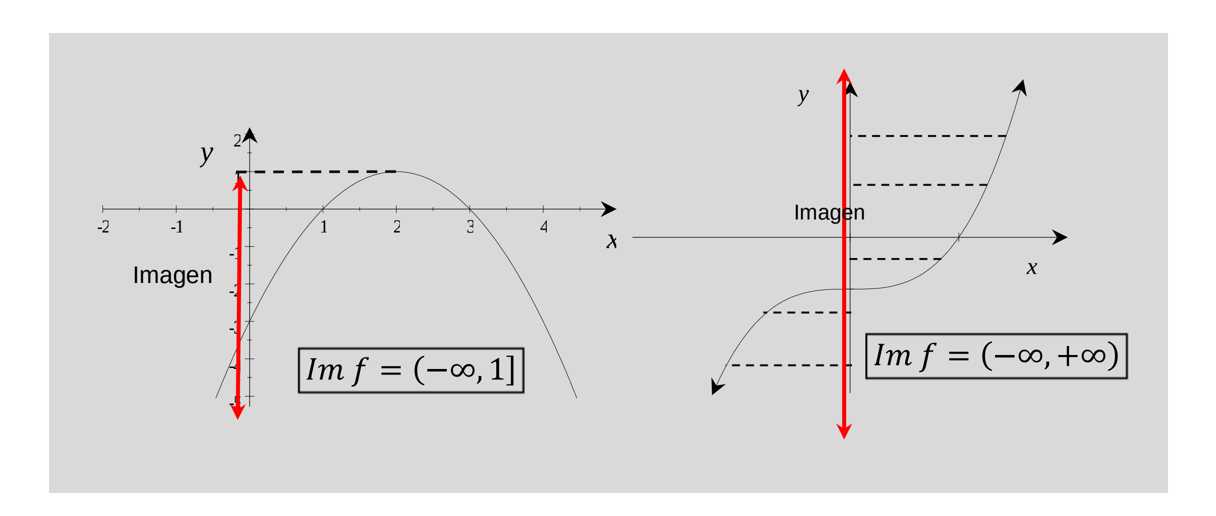


Observa a través del siguiente gráfico, que representa la función de producto-intercambio del ejemplo 7, cuál es su DOMINIO y cuál su IMAGEN:



Gráficamente:

La IMAGEN de una función gráficamente se la obtiene proyectando cada uno de los puntos del gráfico de la función sobre el eje de ordenadas y el segmento que se obtiene es la imagen:



Antes de estudiar con detenimiento los comportamientos gráficos de las funciones, reflexionaremos algunos de los conceptos vistos hasta aquí.

¿Qué hemos aprendido?

Hemos estudiado el concepto de función, reconociendo su dominio e imagen, distinguiendo las distintas maneras en las cuales podremos encontrarlas.
Te proponemos un breve repaso de los contenidos estudiados hasta aquí, mediante la resolución del siguiente cuestionario:

1) ¿A tu criterio y con tus palabras, cuál te parece la característica esencial que diferencia a una relación funcional de una relación?.

2) Si se quisiera analizar la eficiencia de la campaña publicitaria de un determinado producto, qué variables analizarías? ¿Cuál sería la variable independiente y cuál la variable dependiente?.

3) Piensa en una regla que relacione: el conjunto de los reales con los reales mayores o iguales que 2 e identifica los conjuntos dominio e imagen.

4) Dada una regla de correspondencia que relaciona el sueldo de los trabajadores con un impuesto cuya alícuota es del 2 % sobre el sueldo, reconoce dominio e imagen, conociendo que después del último aumento los salarios son superiores a $ 3000 pero ninguno supera los $ 5500.

1.3. Gráficas.

Una gráfica es otra de las formas de representar una función y nos permite, hacernos una idea clara de cómo es su comportamiento.
Los tramos en que una función crece o decrece, asume valores positivos o negativos, los puntos en que toma valores mayores o menores a los que le rodean son muy importantes para el estudio de una función.

Si la función viene dada por su gráfica, es relativamente fácil apreciar dichos tramos, la dificultad está en identificarlos cuando solo disponemos de la expresión algebraica de la función.

De allí la importancia de esbozar su comportamiento gráfico.

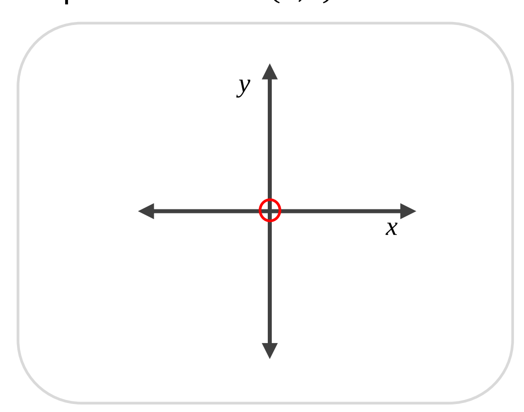
Gráfica:

La gráfica de f consta de todos los puntos $(x, f(x))$ del plano coordenado tal que, x pertenece al dominio de f.

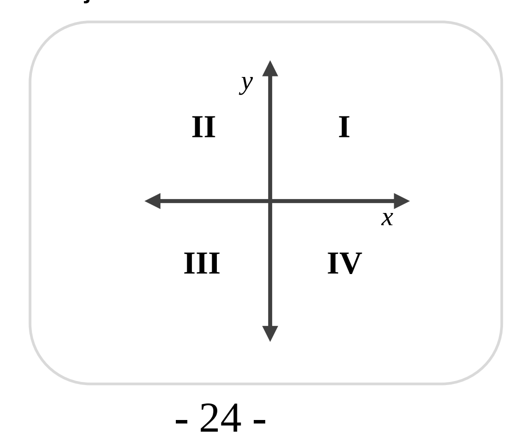
El sistema de representación gráfica más usado es el de coordenadas cartesianas formadas por dos líneas rectas que se cortan en un ángulo recto.

Recordemos algunos conceptos:

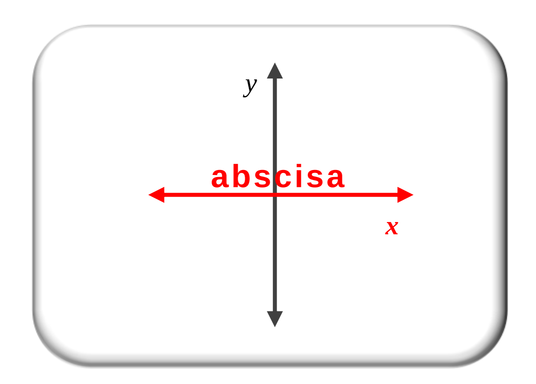
- ✓ El punto de intersección de los ejes coordenados determina el origen del sistema, que es el par ordenado $(0,0)$:

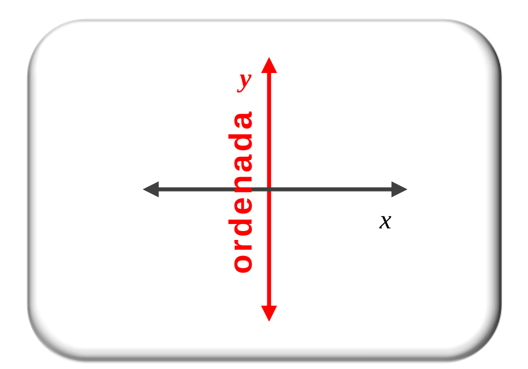


- ✓ Los ejes dividen el plano en cuatro áreas o regiones denominados CUADRANTES, que se numeran del I a IV siguiendo el sentido contrario al de las agujas del reloj.

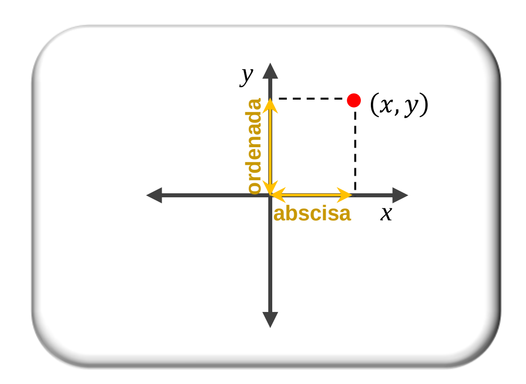


- ✓ La línea horizontal es el eje x, llamado eje de abscisas y la línea vertical es el eje y, llamado eje de ordenadas.





- ✓ La escala o unidad de medida de ambos ejes, pueden no coincidir ya que serán apropiadas a lo que cada uno represente.
- ✓ La abscisa de un punto es la coordenada que indica su distancia al eje y.
- ✓ La ordenada es la coordenada que indica su distancia al eje x.
- ✓ La posición de un punto se indica expresando sus coordenadas entre paréntesis en el orden abscisa, ordenada: (x, y).



Dada la importancia de contar con la gráfica de la función, veremos cómo obtenerla.

1.4.1 Puntos Notables: Intersecciones y Simetrías.

¿Cómo obtener la gráfica de una función a partir de su expresión algebraica?

La forma más común de graficar una función consiste en confeccionar una tabla de valores a partir de darle algunos valores arbitrarios a la variable

independiente x y reemplazar dichos valores en la fórmula o expresión algebraica de manera de obtener los correspondientes valores de y.

Estos pares de valores corresponden a las abscisas y ordenadas de los puntos que se grafican en un sistema de coordenadas.

Se unen por último esos puntos con una curva suave.

Si bien la gráfica de una función es un conjunto de puntos, para representarla no siempre es una buena metodología obtener indiscriminadamente las coordenadas de muchos puntos de ella.

Para representarla eficazmente habría que saber localizar las particularidades que la caracterizan, siguiendo el siguiente procedimiento:

Sugerencia para Graficar Funciones:

- ✓ Se identifican las variables y las unidades en que están descritas.
- ✓ Se obtienen el dominio de la función.
- ✓ Se identifican sus **puntos notables**

A qué llamamos Puntos Notables?

Puntos Notables: Son puntos que pertenecen al gráfico de la función y que son especialmente representativos. Dentro de los puntos notables que suele ser conveniente localizar, están aquellos en los que la función intercepta a los ejes coordenados.

INTERSECCION CON LOS EJES COORDENADOS

Intersección con el eje de ordenadas:

Es el punto de la función que tiene por coordenadas a: $(0, f(0))$.
Es decir que se obtiene cuando la variable INDEPENDIENTE toma el valor cero.

Observación:

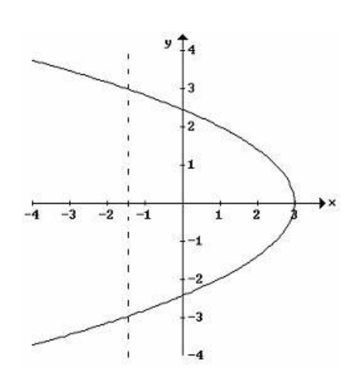
Si la relación es funcional, solo puede existir **un único punto de corte** con el eje “y”: $\boxed{(0, f(0))}$.

Para Reflexionar:

A partir de la definición de Función y la determinación del punto de intersección con el eje de ordenadas: ¿Por qué crees que una relación funcional no puede tener más de un punto de corte con el eje y?.

Como ayuda te mostramos el comportamiento gráfico de la relación:

$y = \pm\sqrt{-2(x-3)}$, que **NO ES FUNCIÓN**



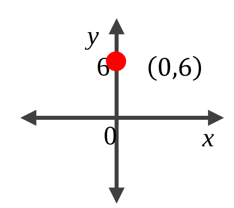
Analiza el siguiente ejemplo de intersección con el eje “y”:

Ejemplo 9: Sea $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Encontrar la intersección-y es hacer $x = 0$ en la expresión algebraica: $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Luego, $f(0) = (0)^2 - 5.0 + 6$

$$f(0) = 6$$



Así, surge que el punto $(0,6)$ es el punto en el que la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ corta al eje y.

Otro punto notable que será importante localizar, es él o los puntos de corte de la función con el eje x.

Intersección con el eje de abscisas:

Son los puntos de la función que tiene por coordenadas a: $(x, 0)$.
Es decir que se obtiene cuando la variable DEPENDIENTE toma el valor cero.

Las intersecciones de la función al eje x se obtienen, buscando las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$

En los puntos en los que la gráfica corta al eje x, las ordenadas serán cero, ya que los puntos se encuentran sobre el eje x, y los valores de abscisas serán los valores de x para los cuales la función se anula $f(x) = 0$.
En el ejemplo 9: La función: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ se anula cuando $x = 2$ y $x = 3$, pues.

$$f(2) = (2)^2 - 5.2 + 6 = 0$$

$$f(3) = (3)^2 - 5.3 + 6 = 0$$

Observación:

A diferencia de lo que establecimos con respecto a la intersección y, puede existir más de un corte al eje x, y sin embargo seguir siendo relación funcional.

¿Veamos cómo obtuvimos los valores $x = 2$ y $x = 3$, que anulan la función: $f(x) = x^2 - 5x + 6$?

Se obtienen las intersecciones de la función al eje x, buscando las soluciones reales de la ecuación: $f(x) = 0$. En este caso:
$x^2 - 5x + 6 = 0$

Recuerda

Que una ecuación de segundo grado con una incógnita del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve aplicando la fórmula:

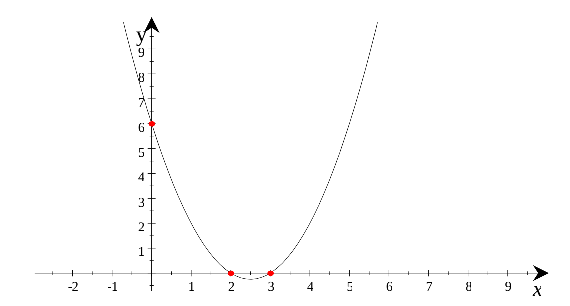
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aplicamos la fórmula para resolver ecuación cuadrática y queda:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{25-24}}{2} = 3 \\ \frac{5-\sqrt{25-24}}{2} = 2 \end{cases}$$

Luego, las intersecciones de la función: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ con el eje x son los puntos: $(3,0)$ y $(2,0)$.

Observa las intersecciones de la función: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ con el eje de abscisas y de ordenadas son: $(3,0)$; $(2,0)$ y $(0,6)$ respectivamente:



Otro concepto que te puede ayudar a graficar es el de **simetría**.

Distinguiremos dos tipos de simetría:

Simetría respecto al eje de ordenadas:

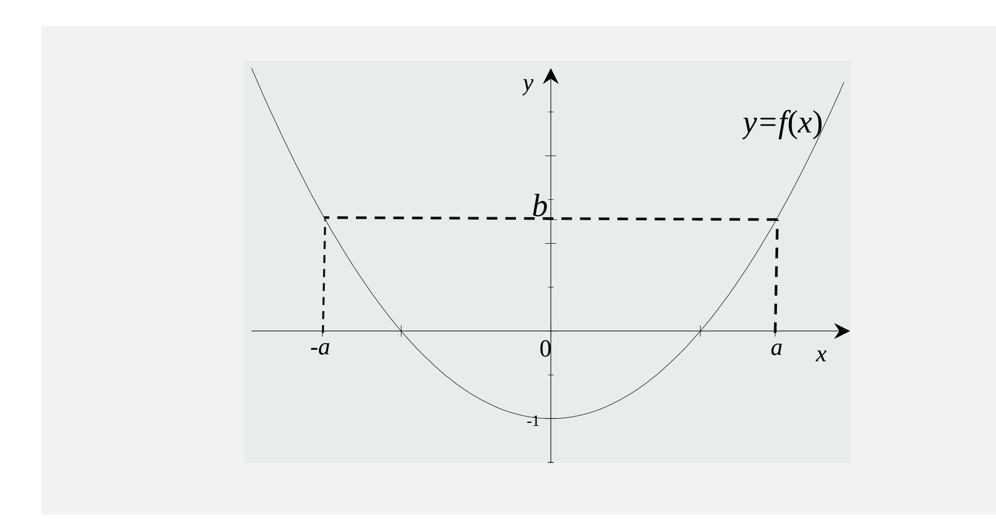
Si una función f verifica que $f(x) = f(-x)$, entonces es SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE Y, y se dice que la función es **PAR**.

Esta definición implica que a valores opuestos de la variable independiente, la función asumirá iguales valores y se interpreta como:

Una función será simétrica respecto al eje de ordenadas, si su comportamiento gráfico se "refleja" en dicho eje, de manera que su comportamiento es el mismo a ambos lados del eje de ordenadas.

Es decir si el punto (a,b) pertenece a la gráfica de la función es porque $f(a) = b$, y si la función es simétrica respecto al eje y, también será $f(-a) = b$, por lo que el punto $(-a,b)$ también pertenecerá a la gráfica.

Gráfico de una función f simétrica al eje y:



Simetría respecto al origen del sistema de coordenadas:

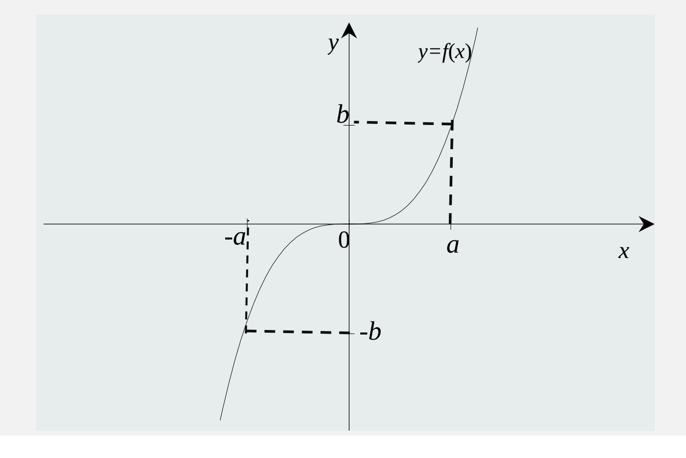
Si una función f verifica que $f(x) = -f(-x)$ entonces su gráfica es simétrica respecto al origen y se dice que la función es **IMPAR**

Esta definición implica que a valores opuestos de la variable independiente, la función asumirá valores opuestos y se interpreta como:

Una función es simétrica respecto al origen del sistema de coordenadas, si su comportamiento gráfico se "refleja" en el origen (0,0) del sistema de coordenadas.

Es decir si el punto (a, b) pertenece a la gráfica de la función es porque $f(a) = b$, y si la función es simétrica respecto al origen del sistema, también será $f(-a) = -b$, por lo que el punto $(-a, -b)$ también pertenecerá a la gráfica.

Gráficamente una función f es simétrica al eje y cuando:



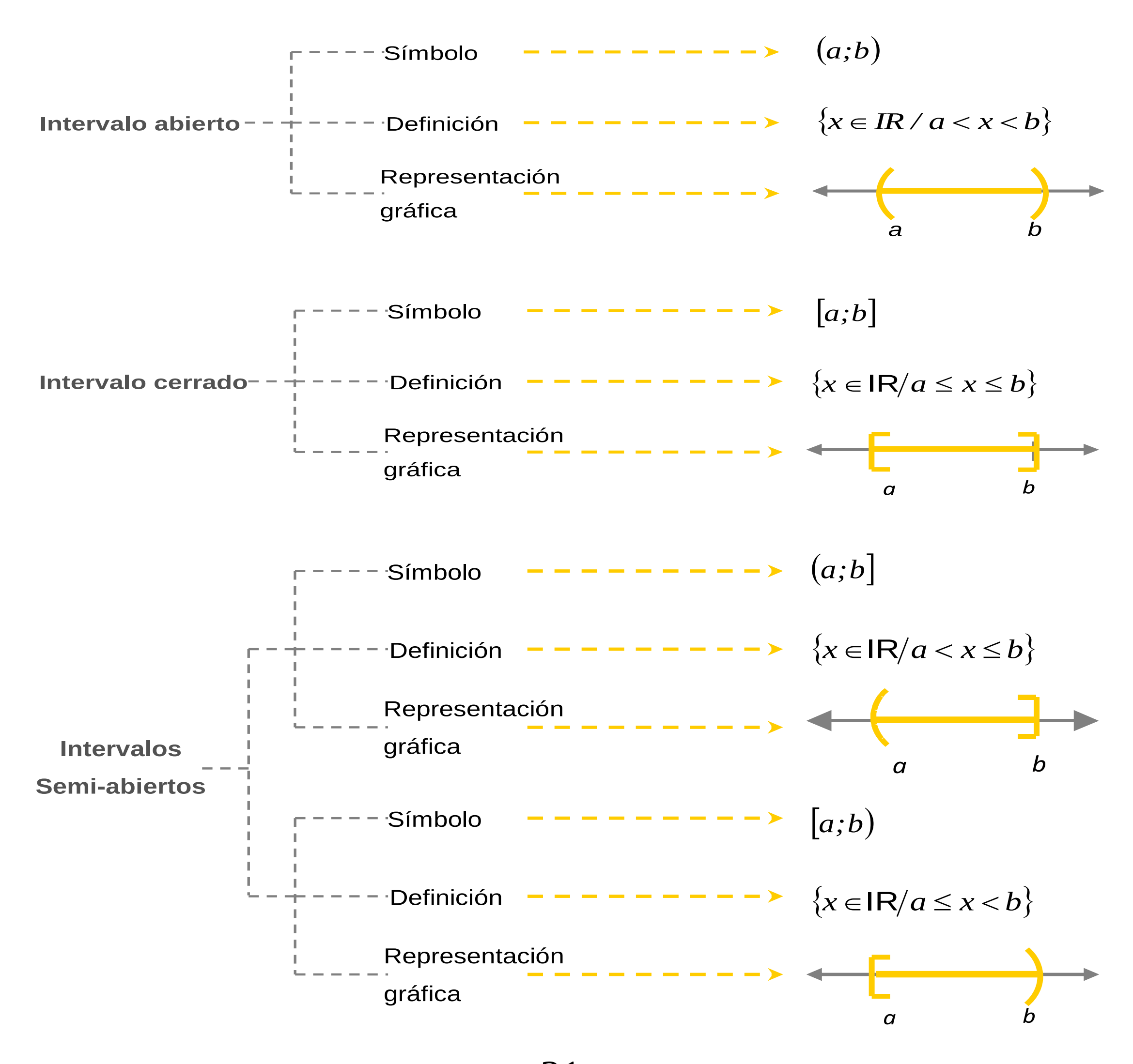
Reconocer que una función presenta algunas de las SIMÉTRIAS anteriores, permitirá estudiar la función hasta el eje y si es Par o hasta el origen si es Impar y luego extender su comportamiento a la otra mitad.

1.4.2 Interpretación de gráficas.

Para poder interpretar las gráficas de funciones te recordamos algunos conceptos:

Intervalos: Recibe el nombre de intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre dos valores, llamados extremos del intervalo.

En general, dados a y $b \in$ IR, se definen los siguientes intervalos:



Intervalos Infinitos

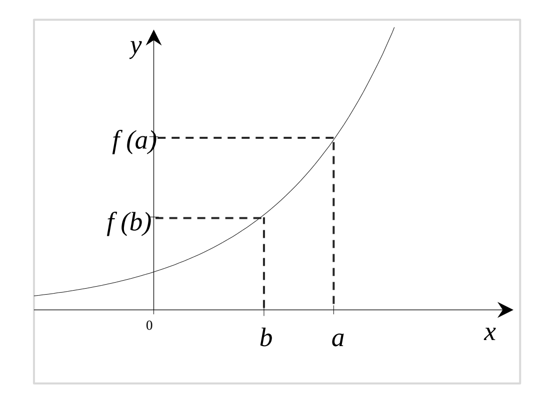
- Símbolo → $(a;\infty)$
- Definición → $\{x \in \text{IR} / x > a\}$
- Representación gráfica → (recta con paréntesis abierto en a, hacia la derecha) a

- Símbolo → $[a;\infty)$
- Definición → $\{x \in \text{IR} / x \geq a\}$
- Representación gráfica → (recta con corchete cerrado en a, hacia la derecha)

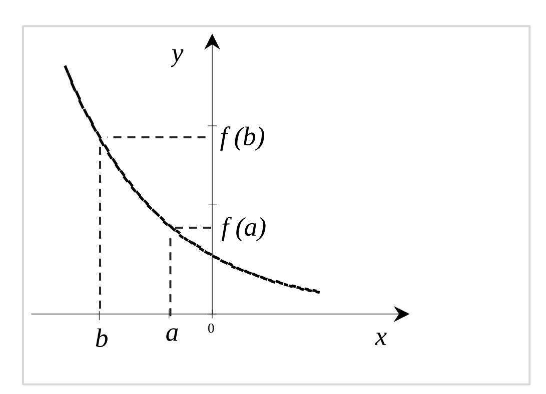
- Símbolo → $(-\infty;b)$
- Definición → $\{x \in \text{IR} / x < b\}$
- Representación gráfica → (recta con paréntesis abierto en b, hacia la izquierda) b

- Símbolo → $(-\infty;b]$
- Definición → $\{x \in \text{IR} / x \leq b\}$
- Representación gráfica → (recta con corchete cerrado en b, hacia la izquierda) b

Función Creciente: Una función f es creciente en un intervalo si para cualquier par de números a y b del intervalo tal que $a > b$ se cumple que $f(a) > f(b)$. Gráficamente:



Función Decreciente: Una función f es decreciente en un intervalo si para cualquier par de números a y b del intervalo tal que $a > b$ se cumple que $f(a) < f(b)$. Gráficamente:



Máximo absoluto: Una función alcanza un máximo absoluto en $x = a$ si su ordenada $f(a)$ es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.

Mínimo absoluto: Una función alcanza un mínimo absoluto en $x = a$ si su ordenada $f(a)$ es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.

Intervalo de positividad: Se llama intervalo de positividad o conjunto de positividad de una función al conjunto formado por los valores de x para los cuales $f(x) > 0$. Gráficamente corresponde al intervalo o intervalos del **dominio** (los valores de x), en los cuales la curva se encuentra por encima del eje x

Intervalo de negatividad: Se llama intervalo de negatividad o conjunto de negatividad de una función al conjunto formado por los valores de x para los cuales $f(x) < 0$. Gráficamente corresponde al intervalo o intervalos del **dominio** (los valores de x), en los cuales la curva se encuentra por debajo del eje x.

SÍNTESIS DE LO APRENDIDO:

Hasta aquí hemos desarrollado los primeros pasos en el análisis de funciones. Partiendo de una colección de datos, se buscó una expresión algebraica que la representara.

Esto se hizo, por ejemplo, cuando se concluyó que la función que vinculaba las temperaturas promedio y los kilos de helados vendidos era: $K(t) = 30.t + 100$

Esta expresión algebraica constituye el MODELO MATEMÁTICO que representa la situación planteada a través de la tabla de datos.

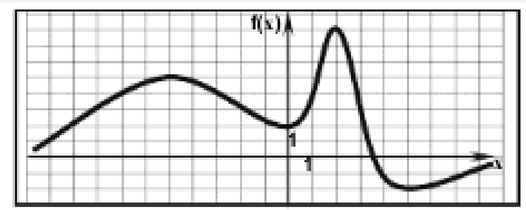
La obtención de la expresión algebraica nos facilitará analizar su dominio su imagen y su comportamiento gráfico.

Contando con el comportamiento gráfico podemos analizar las variaciones que experimenta la función, saber por ejemplo dónde tiene un comportamiento creciente, dónde es decreciente, dónde constante. Podremos apreciar si posee valores extremos (máximos o mínimos) y aproximar cuál será el comportamiento de la función ante cambios de la variable independiente (tendencias).

Integrando los Conceptos

Teniendo en cuenta los conceptos hasta aquí estudiados te proponemos la siguiente actividad cuya finalidad es la de integrar los conceptos aprendidos:

Observa la siguiente curva correspondiente a la función f cuyo dominio es el intervalo $[-10.8\,, 9\,)$:



Y responde:

a) El valor máximo de la función es -----------------------

b) El valor mínimo de la función es ------------------------

c) El conjunto imagen de la función es --------------------

d) La imagen de -2 en la función es ------------------- y f (5) = ------------

e) La imagen de cero en la función es ---------- , entonces f(0)= --------------

f) El gráfico corta al eje de ordenadas en el punto (--- ; ----)

g) El gráfico corta al eje de abscisas en el punto (--- ; ----)

h) La raíz de la función es ------------ o equivalentemente la función se anula en -------------------

i) Los elementos del dominio que tienen como imagen 3 en la función es : --------------------------------

j) El signo de f(-3.25) es ---------------------------- y el signo de f(8.43) es -----------------------------

k) La función es positiva en el intervalo : ----------------------------------, es decir f(x) > 0 $\forall$ x $\in$----------------------

l) En el intervalo [4 , 7] el signo de la función es ---------------------------. Expresa en símbolos esta afirmación---

m) Los elementos del dominio donde la función resulta decreciente son: ---

n) Los elementos del dominio donde la función resulta creciente son: ---

Veamos ahora algunas funciones que con frecuencia las encontraremos representando fenómenos de índole económico.

1.5 Algunas funciones IR de variable IR:

La mayoría de las funciones con las que trabajaremos se obtienen al operar con unas pocas funciones llamadas funciones elementales. A continuación se muestran en detalle algunas de las más utilizadas ellas son:

1.5.1 Función Polinómicas.

Son expresiones del tipo: $y= 2x^3+5x^2 -10\ x+ 7$. Se las denomina funciones **polinómicas o polinomiales.** En este caso es una función polinómica de grado 3, por ser 3 el mayor exponente al que está elevada la variable x.

Se caracteriza por ser una suma algebraica de términos, en la que cada término está formado por el producto entre un coeficiente constante (en el ejemplo: 2, 5, 10, 7) y la variable independiente elevada a un exponente entero no negativo (en este caso: 3, 2, 1, 0).

Generalizando podemos establecer que:

Una función polinomial (ó polinómica) de grado n, siendo $a \neq 0$ y n un número entero no negativo, presenta la siguiente estructura:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

El dominio de toda función polinómica es el conjunto $\Re$ de números reales.

Las funciones polinómicas más conocidas y que serán estudiadas con más detenimiento en la siguiente unidad son:

Polinomio de grado 0, se la llama **función constante:** $f(x) = a_0 \cdot x^0 = a_0$

Polinomio de grado 1, se la llama **función lineal:** $f(x) = a_1 x + a_0$

Polinomio de grado 2, se la llama **función cuadrática:** $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

1.5.2 Funciones Racionales.

Una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinómicas, se denomina FUNCIÓN RACIONAL.

Ejemplo 10: La función $f(x) = \frac{x^3 + x + 5}{x^2 - 4}$ es una función racional. Pues está formada por el cociente entre dos polinomios.

Ejemplo 11: La función $f(x)=\frac{3}{x}$ es una función racional formada por el cociente entre un polinomio de grado 0 y otro polinomio de grado 1.

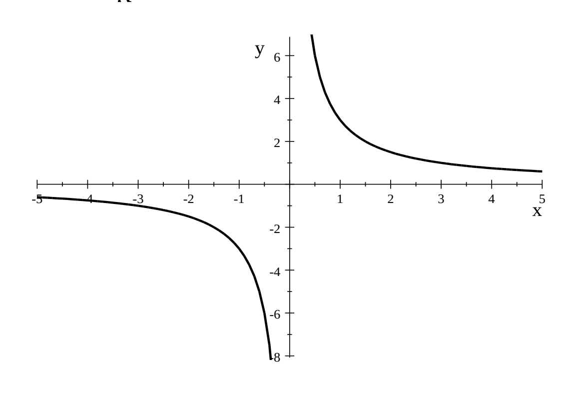
Observación:

El dominio de una función racional, es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los cuales $Q(x)=0$. Es decir que no forman parte del dominio de la función racional los valores de x que anulan el polinomio del denominador, ya que la división de un número real por cero no tiene solución.

RECUERDA que cuando definimos DOMINIO establecimos que es el conjunto de valores de la variable independiente para los cuales la función existe.

Para representar gráficamente una función racional, seguiremos el procedimiento ya visto, buscando los puntos notables, analizando intersecciones y simetrías, o confeccionando una tabla con algunos valores de x y de $f(x)$ que nos permita aproximar el comportamiento gráfico.

Cuando se grafique una función racional, hay que prestar especial atención, ya que cuando la variable independiente se aproxima al valor o valores que anulan el denominador, la función toma valores muy grandes o muy pequeños, haciendo que en ese punto la función sea **discontinua.** Como te muestra la siguiente gráfica de $f(x)=\frac{3}{x}$



Ya veremos más adelante el tema de **CONTINUIDAD DE FUNCIONES** donde se evaluaran estos casos con detenimiento.

1.5.3 Funciones Definidas por Segmentos.

Cuando en una función existe **más de una expresión algebraica** para relacionar las variables que intervienen en la relación, se dice que la función está definida por segmentos.

Esto significa que algunos valores de la variable independiente se relacionarán con sus correspondientes valores de la imagen a través de una regla o fórmula, mientras que otros valores del dominio se relacionarán a través de otra fórmula distinta a la anterior.

Supongamos, que la descripción del comportamiento de la temperatura del agua que ponemos a calentar en un recipiente, distingue dos etapas:

La primera, entre los minutos 0 y 6 y responde a la fórmula: $\boxed{y = 10 + 15t}$

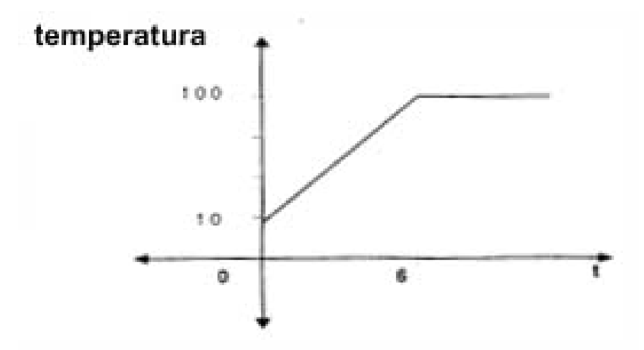
La segunda, del minuto 6 en adelante y responde a la fórmula: $\boxed{y = 100}$

La función **es una sola** que relaciona las variables tiempo (t) con temperatura (y), solo que existe más de una fórmula para hallar los correspondientes $y = f(t)$.

Sintéticamente, se expresa:

$$y = f(t) = \begin{cases} 10 + 15t & si \quad 0 \le t < 6 \\ 100 \quad si & t \ge 6 \end{cases}$$

Su representación gráfica, es:



Esta función sólo tiene sentido para el 0 y valores positivos de t.

El dominio sería el intervalo: $[0,+\infty)$, pero si a su vez consideramos que el agua se evapora totalmente al cabo de una hora (60 minutos), el dominio de la función sería restringido al intervalo $[0,60]$.
Además, observando la gráfica determinamos que la imagen está dada por el intervalo $[10, 100]$
Existen muchas funciones cuya representación gráfica se compone de varias secciones. Por ejemplo el precio de una llamada telefónica en función del tiempo empleado, el costo de un paquete postal en función de su peso.

Repasando:

Para que te familiarices con este tipo de funciones te proponemos que traces la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

Y determines su Dominio e Imagen

A medida que avancemos en el análisis de funciones, podremos apreciar que muchas de ellas se obtienen a partir de combinaciones algebraicas, o a partir de desplazamientos de funciones más sencillas.

1.6 Transformaciones de funciones.

1.6.1 Combinación de Funciones.

Así como dos números a y b pueden ser sumados para producir un nuevo número $a + b$, dos funciones f y g se pueden sumar para producir una nueva función $f + g$.
Ésta es sólo una de las operaciones con funciones que veremos en esta sección:

SUMA, DIFERENCIA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES

Una función f puede combinarse con otra función g mediante operaciones aritméticas:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \longrightarrow \text{SUMA}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \longrightarrow \text{DIFERENCIA}$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) \longrightarrow \text{PRODUCTO}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \text{COCIENTE}$$

El dominio de $f + g$, f - g, y el de $f.g$ es la intersección de los dominio de f y g.

El dominio del cociente $\frac{f}{g}$ es la intersección de los dominios de f y g, excluyendo los números para los cuales $g(x) = 0$

1.6.2 Composición de Funciones.

La composición es una operación entre funciones que se establece de la siguiente manera:

Dadas dos funciones f y g, se define como la composición de la función f con la función g, a la función denotada por $f \text{ o } g$ (se lee f compuesta con g), cuya regla de correspondencia es:

$$(f \text{ o } g)(x) = f[g(x)]$$

donde $g(x)$ pertenece al Dominio de $f(x)$.

Gráficamente la situación es:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f[g(x)]$$

De la definición resulta que componer dos funciones es hacer actuar una de ellas sobre el resultado de la otra.

De este modo obtener $f[g(x)]$, basta sustituir la función g en la variable independiente de la función f.

Ejemplo 12: Sea las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Para obtener $f[g(x)]$ se sustituye $g(x)$ por su expresión, o sea: $f[g(x)] = f[\sqrt{x}]$ y ahora sustituimos a x por $\sqrt{x}$ en la expresión de f: $f[g(x)] = f[\sqrt{x}] = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$.

Aquí la función **elevar al cuadrado y restar uno** actúa sobre el **resultado de la raíz.**

Ejemplo 13: Tomemos las mismas funciones anteriores pero ahora calcularemos $g[f(x)]$.

Procedemos así. $g[f(x)] = g[x^2 - 1] = \sqrt{x^2 - 1}$. En este caso la función **raíz** cuadrada actúa sobre el resultado de la otra función.

Observación:

En general la composición de funciones no es conmutativa. En símbolos:

$$(f\text{o}g)(x) \neq (g\text{o}f)(x)$$

Hasta aquí hemos obtenido nuevas funciones, aplicando operaciones algebraicas a otras funciones.

*Consideremos ahora la función que se obtiene al restar una constante **c** a todos los valores de una función, y podremos verificar que existen familias de gráficas que tienen esencialmente la misma forma.*

1.6.3 Desplazamientos y Reflexión de Funciones.

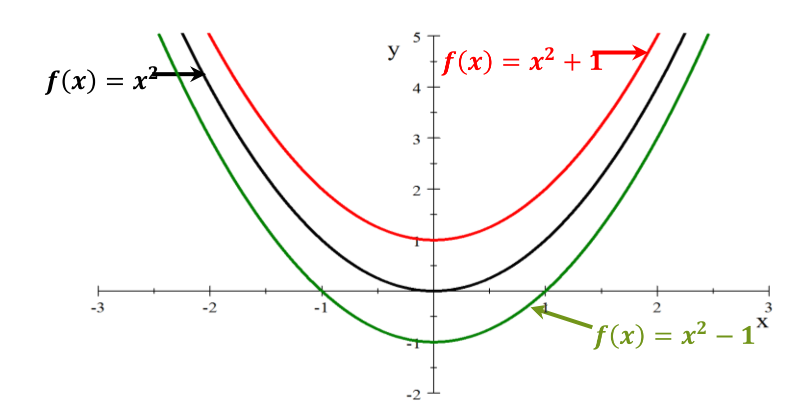
Desplazamiento Vertical: La función $f(x) + c$ es la función $f(x)$ desplazada o trasladada c unidades verticalmente. Ahora bien, si $c > 0$ el desplazamiento es hacia arriba y si $c < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

A partir del ejemplo $y = x^2$, analizaremos los cambios que se producen al sumar una constante "c" a todos los valores de la función.

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 + 1$	$f(x) = x^2 - 1$
-2	4	5	3
-1	1	2	0
0	0	1	-1
1	1	2	0
2	4	5	3

Las gráficas de las funciones $\boxed{f(x) + c}$, se obtienen desplazando la gráfica de $f(x)$ una distancia "**c**" hacia arriba o hacia abajo, según sea "**c**" mayor o menor que cero respectivamente.

Trasladando los valores de la tabla a un sistema de coordenadas cartesianas:



Las gráficas del ejemplo anterior, evidencian desplazamientos verticales de la gráfica de $y = x^2$, que responden a las siguientes reglas generales:

Para obtener la gráfica de	**Se desplaza $y = f(x)$**
$y = f(x) - c$	**c** unidades hacia abajo, si $c > 0$
$y = f(x) + c$	**c** unidades hacia arriba, si $c > 0$

Ejemplo 14: Sea la función $f(x) = x^3$. Escribe la función que se obtiene al desplazar f 3 unidades hacia abajo.

Significa que debemos restar 3 a la $f(x)$ dada.

Luego, $g(x) = f(x) - 3 = x^3 - 3$ es la función f desplazada 3 unidades hacia abajo.

Es posible enunciar reglas semejantes para los desplazamientos horizontales.

Desplazamiento Horizontal: La función $y = f(x - c)$ es la función $f(x)$ desplazada o trasladada c unidades horizontalmente. Ahora bien, si $c > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha y si $c < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

Así:

Para obtener la gráfica de:	Se desplaza y = f(x).
$y = f(x - c)$	**c** unidades hacia la derecha, si $c > 0$
$y = f(x + c)$	**c** unidades hacia la izquierda, si $c < 0$

Ejemplo 15: Sea la función $f(x) = x^3$. Escribe la función que se obtiene al desplazar f 3 unidades hacia la izquierda.

Significa que debemos restar (-3) a la variable independiente. Luego, $f\big(x - (-3)\big) = f(x + 3) = (x + 3)^3$ es la función f desplazada 3 unidades hacia la izquierda.

Desplazamiento Verticales y Horizontales: La función

$$y = f(x - h) + c$$

es la función $f(x)$ desplazada c unidades verticalmente y h unidades horizontalmente.

Reflexión con respecto al eje de abscisas: La función

$$y = -f(x)$$

es la reflexión de la función $f(x)$ con respecto al eje "x" .

El tema de desplazamiento y reflexión de funciones son conceptos que nos permite graficar funciones más o menos complejas desplazando o reflejando funciones elementales o conocidas.

Repasemos:

Dibuja la función $f(x) = -(x+2)^2 - 1$ a partir de la gráfica elemental:

$$f(x) = x^2$$

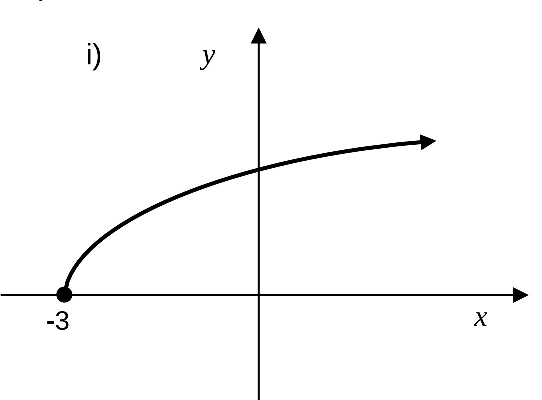
Y escribe en lenguaje coloquial los desplazamientos y reflexiones que tuviste que realizar para obtenerla a partir de la función elemental dada.

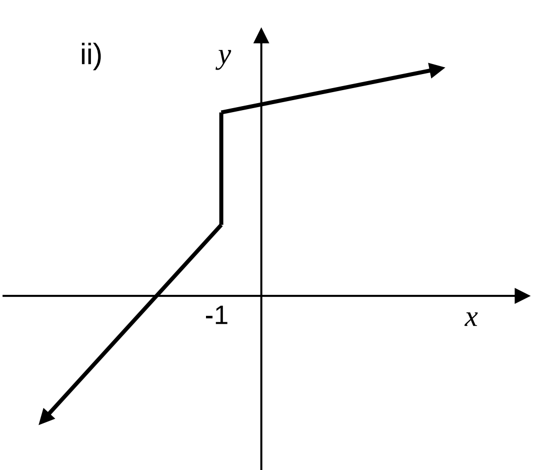
A MODO DE CIERRE: RESOLVER-REPASAR

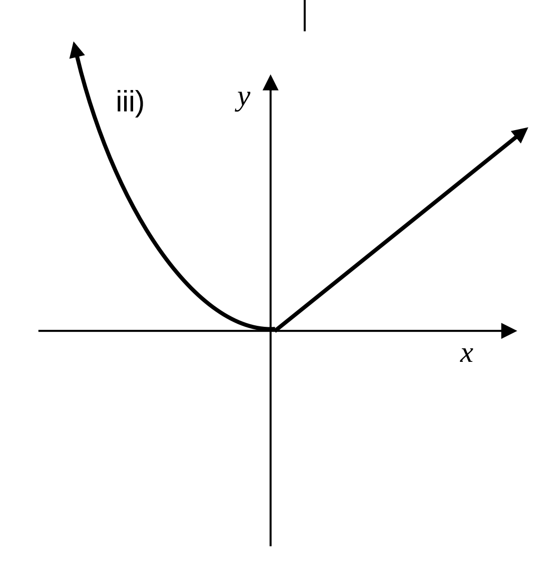
Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

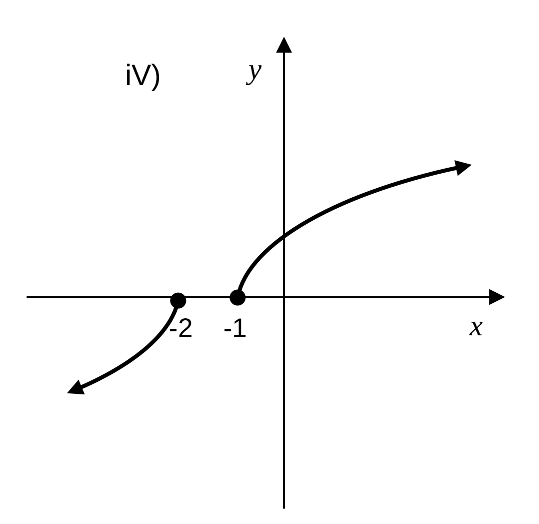
Actividad 1:

a) Analiza si las siguientes curvas representan funciones de **R** en **R**. Explica tu respuesta:





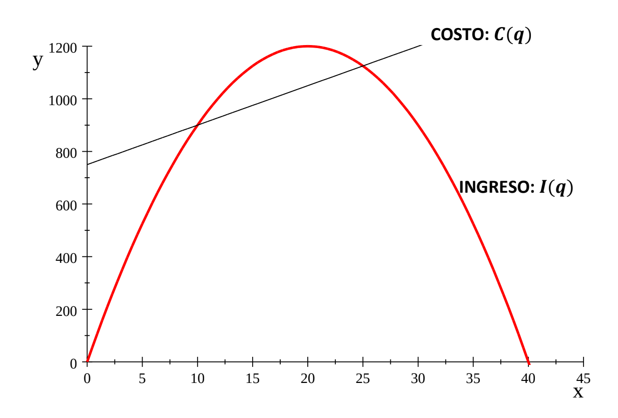




b) Para aquellas que no sean funciones de **R** en **R** y, en caso de ser posible, restringe el conjunto de partida para que sean funciones e indica el conjunto Imagen.

Actividad 2:

La siguiente representación gráfica corresponde idealmente a las funciones Costo Total e Ingreso de una fábrica al producir y vender cierta cantidad de un artículo.



a) $C(0)$ =-------------------------------- . escribe el significado de la respuesta.

b) Halla los valores aproximados de q donde $I(q) = 500$. Expresa lo anterior en palabras.

c) Escribe el intervalo de cantidades del artículo en que los ingresos superan los costos. Expresa en símbolos lo anterior.

d) Deduce las cantidades producidas y vendidas en las que la fábrica obtendrá pérdidas. Explica tu respuesta.

e) El Beneficio ante la venta de q cantidades se los expresa como $B(q) = I(q) - C(q)$, escribe los puntos donde el beneficio es nulo. Escribe el significado de estos puntos.

f) ¿Cuál es el ingreso máximo y ante la venta de cuántas cantidades se obtendría?

g) Para determinar en el gráfico la cantidad del artículo que brinda el mayor Beneficio a la fábrica, ¿cómo procederías? Explica la elección del procedimiento.

Actividad 3:

Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

a) Determina el dominio de f. Justificar.

b) Calcula $f(0)$ y $f(2)$.

c) ¿Cuál es la imagen de -1? Justificar.

d) ¿Cuál es el o los valores de x que verifican que $f(x) = \frac{1}{2}$?.

e) ¿Existen valores del dominio cuya imagen sea negativa? Justificar.

f) ¿En qué puntos la función corta a los ejes coordenados?.

Actividad 4:

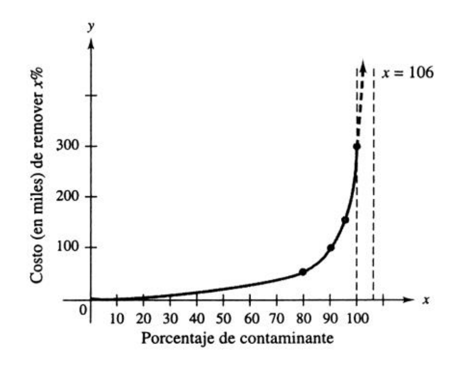
Dadas las funciones: $f(x) = \frac{18x}{106-x}$ y $g(x) = \frac{100.000-50x}{1000+x}$

a) ¿Cómo se denominan este tipo de funciones?

b) ¿Cómo se determina el dominio de este tipo de funciones?

c) Determina el dominio de definición de f y el de g .

d) En muchas situaciones que implican la contaminación ambiental, gran parte de los contaminantes puede eliminarse del aire o agua a un determinado costo. Supone que en la función dada $f(x)$ es el costo (en miles de dólares) de remover x porcentaje de un cierto contaminante. El modelo dado se representa gráficamente como sigue**:**



Determina analítica y gráficamente el dominio del costo de remover el contaminante.

Actividad 5:

Encuentra el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

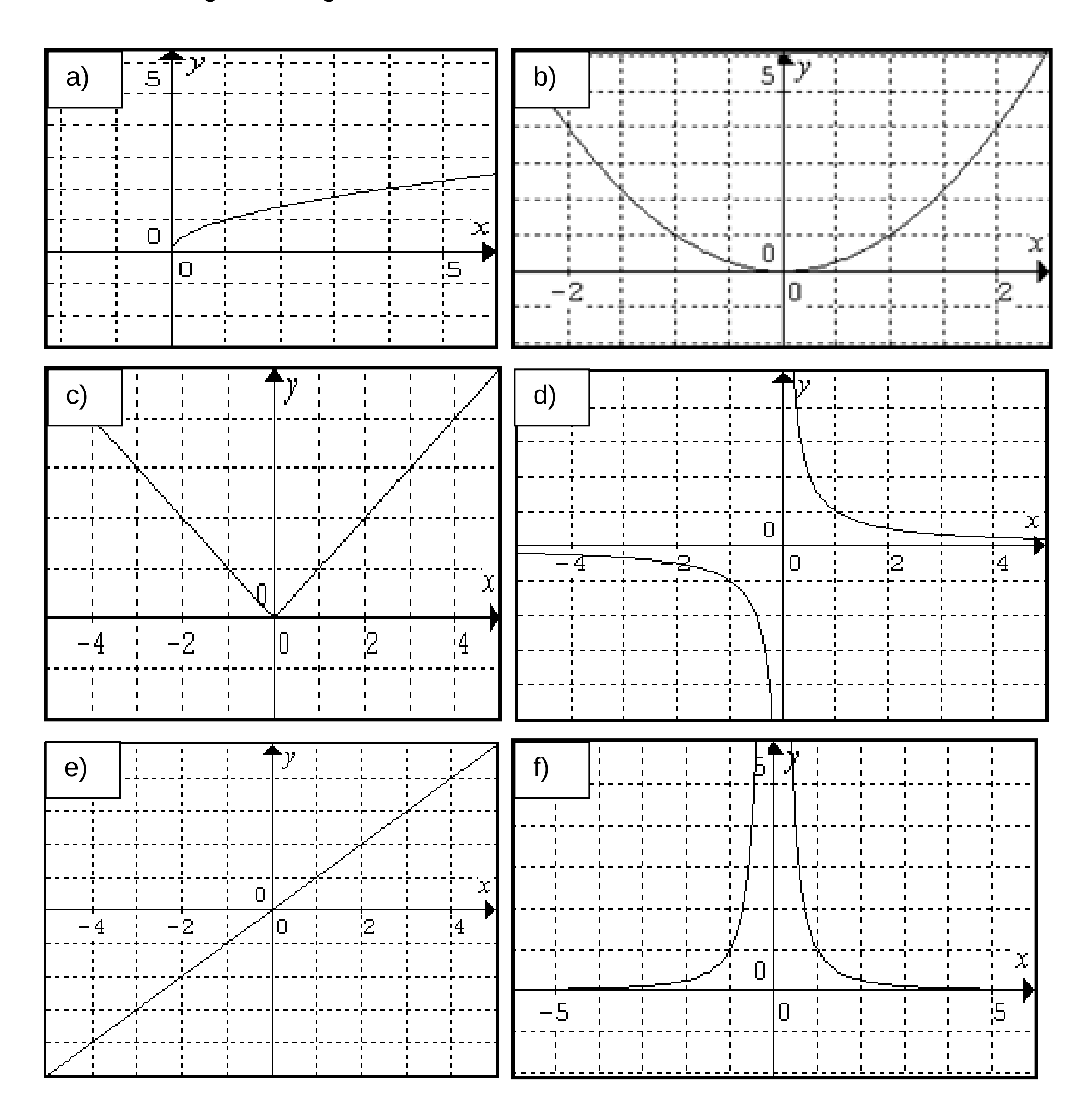
b) $g(x) = \dfrac{3x}{x^3 - 6x^2 + 8x}$

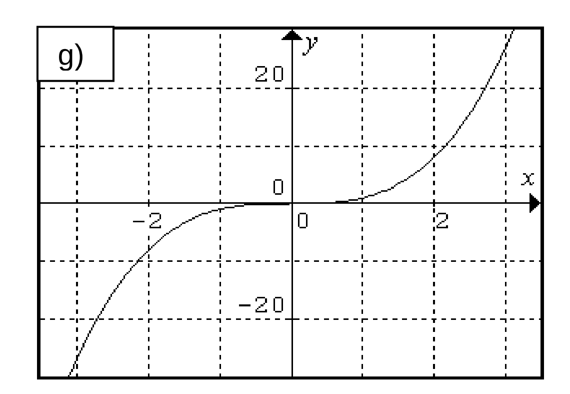
c) $t(x) = \sqrt{(x+1)^{-1}}$

d) $k(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

Actividad 6:

Dadas las siguientes gráficas de funciones:



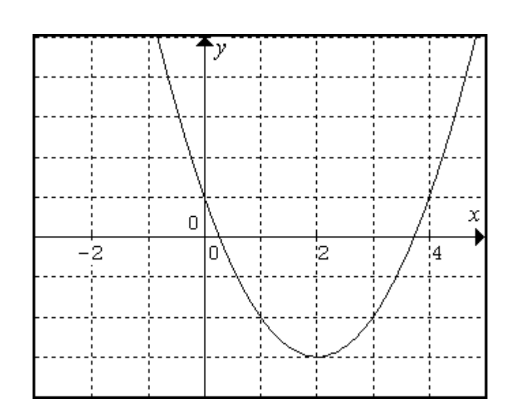


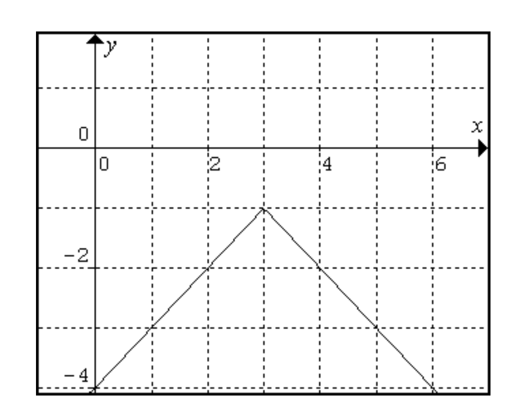
a) Escribe el dominio y la imagen de cada función.

b) Identifica cuales son funciones pares, cuales son impares o si no son par o impar.

Actividad 7:

Dado los siguientes gráficos:





Indica dominio, imagen, intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad.

Actividad 8:

En una compañía de productos químicos se promociona la venta de cierta sustancia de la siguiente forma:

Si el cliente compra de 0 a 4 litros, el precio es: $10 el litro y$10 por gastos de envío. Si la compra es más de 4 litros y menor o igual a 8 litros, el precio es de $5 el litro y $40 por gastos de envío. Si la compra supera los 8 litros, el precio es de $10 el litro, pero no se cobran los gastos de envío.

Información que puede escribirse como una función por secciones o partes:

$$f(x)=\begin{cases}10x+10 & si\ 0<x\le 4\\ 5x+40 & si\ 4<x\le 8\\ 10x & si\quad x>8\end{cases}$$

a) Utilizando la expresión de $f(x)$, calcula:

f(3) = …….. f(4) = ……… f(6) = …… f(8) = ……. f(10) = ……

b) ¿Cuál de los siguientes es el gráfico de $f(x)$?

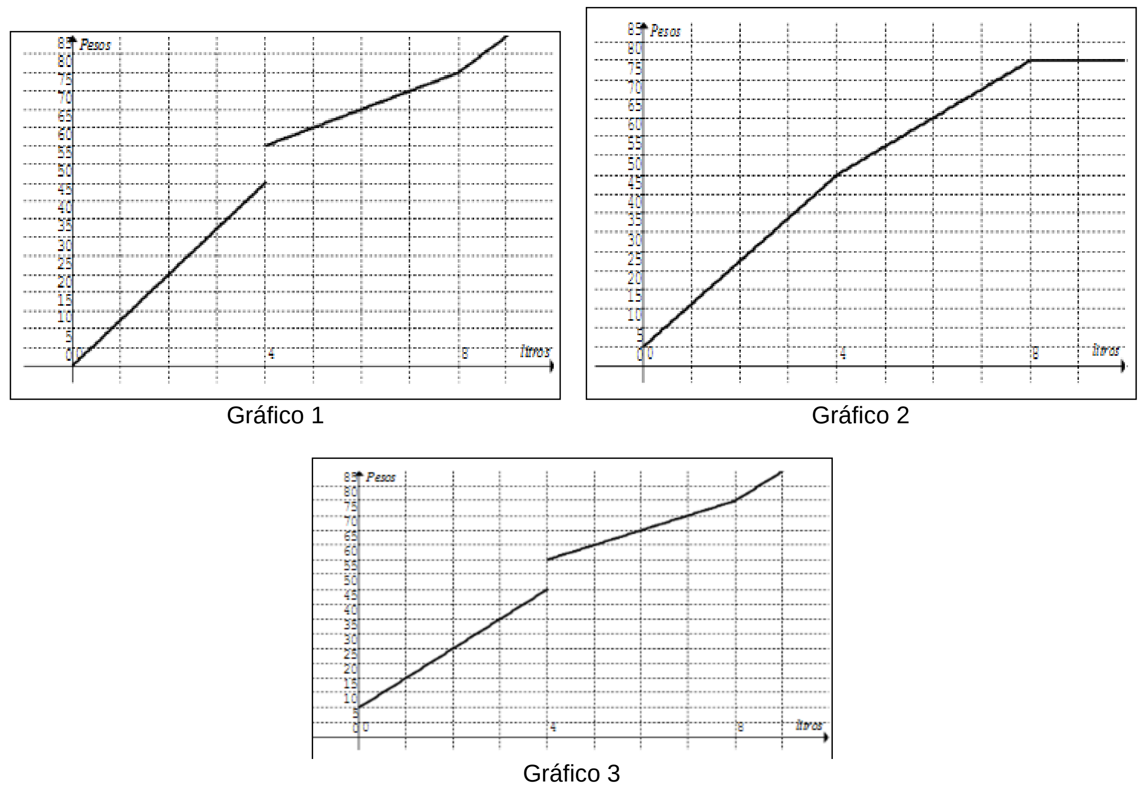


Gráfico 1

Gráfico 2

Gráfico 3

Fuente: en http://es.scribd.com/doc/7516737/Funciones-de-Una-Variable-Real

c) A partir del gráfico, ¿cuántos litros compró un cliente que pagó $65?

Actividad 9:

Para las siguientes funciones definidas por secciones

$$k(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x \geq -1 \\ x+2 & si\ x < -1 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x < 0 \\ 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Grafica las funciones $k\ y\ h$.

b) Para cada función determina: Dominio e Imagen , intersecciones con los ejes coordenados e intervalos de crecimiento, decrecimiento , positividad y negatividad.

UNIDAD II: ESTUDIO DE FUNCIONES

Índice

Unidad II: Estudio Analítico de Funciones

Unidad II

Continuando con el bloque temático **RELACIONES FUNCIONALES**, en esta unidad profundizaremos el estudio de funciones que frecuentemente aparecen en las situaciones problemáticas que se presentan en las ciencias económicas.

Utilizaremos muchos de los conceptos que se estudiaron en la unidad I, hallando expresiones analíticas, reconociendo dominios e imágenes y aproximando comportamientos gráficos.

Identificaremos la expresión analítica o fórmula que define a cada función, distinguiendo los elementos que nos brindan información respecto del comportamiento de cada una de ellas.

Como a menudo la información se da en forma gráfica, deberemos ser capaz de leerlas e interpretarlas, aproximando comportamientos gráficos a partir de sus expresiones analíticas y a la inversa a partir de sus comportamientos gráficos aproximaremos su expresión analítica.

A lo largo de esta unidad estudiaremos con más detenimiento las **FUNCIONES LINEALES, FUNCIONES CUADRÁTICAS, FUNCIONES EXPONENCIALES, FUNCIONES LOGARITIMICAS Y FUNCIONES TRIGONOMETRICAS**.

Objetivos

General:

Utilizar el concepto de función para modelizar a través de herramental matemático situaciones que están relacionadas con las Ciencias Económicas.

Específicos:

- ✓ **Identificar la expresión algebraica que determina a las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.**
- ✓ **Obtener las expresiones algebraicas que representan a las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.**
- ✓ **Graficar las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas a través de la información que brindan sus coeficientes.**
- ✓ **Analizar Funciones Económicas determinadas por funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.**

2.1. Funciones Lineales.

Comenzaremos esta unidad analizando relaciones entre variables que se comportan como funciones lineales y que se denominan así porque se representan gráficamente mediante líneas rectas.
Es el tipo de función que más frecuentemente interviene en las relaciones entre magnitudes de todo tipo, por ejemplo:

El dinero que se gana es proporcional a la cantidad de mercadería que se vende.

El costo de un viaje es proporcional a la distancia recorrida

Determinaremos cuál es la expresión analítica o fórmula que representa a las funciones lineales.

Para ello, nos valdremos del ejemplo de una función que representa el costo total de un fabricante.

Los contadores y economistas a menudo definen el costo total de elaboración de un producto, a partir de dos componentes: **Costo Fijo** y **Costo Variable**. Esos dos componentes se suman para determinar el **Costo Total**.

Ejemplos de Costo Fijo:

- Los **gastos** de diseño de un determinado producto
- Los **gastos** de capacitación del personal

Pues son independientes de la cantidad de artículos que se fabriquen.

Dentro de amplios límites, el **Costo Fijo** es constante para un producto particular y no cambia cuando se fabrican más artículos.

El segundo componente del **Costo Total** es un costo por artículo:

Ejemplos de Costo Variable:

- Los **salarios** por mano de obra.
- Los **materiales** usados en la fabricación de un producto.
- Los gastos de empaque, de envío.

Se los denomina variable pues su valor total depende del número de artículos que se fabriquen.

El **Costo Total**, como ya dijimos, se integra con la suma de ambos de tal forma que podemos escribir:

Costo Total = Costo Variable + Costo Fijo

En símbolos:

$$\boxed{CT = CV + CF}$$

Ejemplo 1: Una empresa que elabora un producto quiere determinar la función que expresa el costo total anual "*y*" en función de la cantidad de unidades producidas "*x*". Los contadores indican que los **gastos fijos** cada año son de 200 (miles de dólares). También estimaron que los **costos de materias primas y mano de obra** por cada unidad producida ascienden a u$s10. ¿Cuál es la función de **Costo Total** de la empresa?. Vamos a tratar de encontrar la expresión analítica que representa dicha relación.

Recuerda

Una forma de representar la función es a través de una tabla de valores como estudiamos en la Unidad 1

En este caso la tabla de valores que representa la relación establecida entre **cantidad de unidades producidas** y **Costo Total**, sería:

Tabla 1

Cantidad de unidades producidas	Costo Total
0	200
1	$10.\mathbf{1} + 200 = 210$
2	$10.\mathbf{2} + 200 = 220$
3	$10.\mathbf{3} + 200 = 230$
⋮	⋮
10	$10.\mathbf{10} + 200 = 300$
x	$10.\ \underset{\text{Cantidad de unidades producidas}}{\boldsymbol{x}} + 200$

Significa que la producción no comenzó (→ fila 0)

Observa:

Cuando aún no comenzó la producción de unidades el **costo total** está formado por el **costo fijo**. A partir de allí para obtener el **costo total** se le **adiciona** al **costo fijo** el **costo variable** que se obtiene de multiplicar el costo por unidad por la cantidad de unidades producidas.

En la última fila de la tabla, cuando generalizamos llamando $\boldsymbol{x}$ al número de unidades producidas, el costo correspondiente es:

$$\boxed{C(x) = 10x + 200}$$

Luego, la **Función** de **Costo Total** es: $C(x) = 10x + 200$ y a partir de esta ecuación podemos determinar cuánto nos cuesta producir cualquiera sea el número de unidades producidas. Por ejemplo, supongamos que queremos producir 20 unidades, saber su costo basta con reemplazar la x por 20 en la ecuación o expresión algebraica hallada de la siguiente manera:

$$\boxed{C(20) = 10.20 + 200 = 400}$$

Entonces el costo de producir 20 unidades es de $ 400.

Es decir que la expresión analítica o expresión algebraica que representa la relación entre las variables unidades producidas (x) y el costo total $C(x)$ de este ejemplo 1 es:

$$\boxed{C(x) = 10x + 200}$$

Además, esta relación funcional, puede ser representada en un sistema de ejes coordenados cartesianos, de manera que para apreciar el comportamiento gráfico de esta función: $C(x) = 10x + 200$ hemos representado algunos de los pares ordenados de la Tabla 1, en el siguiente gráfico:

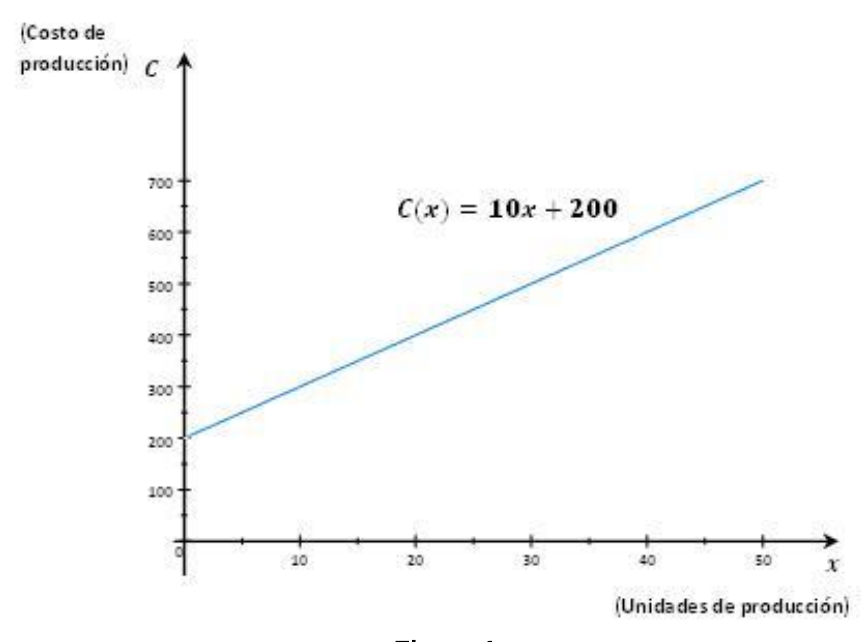


Figura 1

El Gráfico se Lee e Interpreta de la siguiente manera:

La Figura 1, muestra que su representación gráfica es una **línea recta**, que **crece 10 unidades por cada unidad que crece** x y se interpreta que **a medida que aumentan en una unidad la cantidad de productos elaborados, los costos crecen en $10.** Observen que el **corte con el eje de ordenadas** está representado por $(0,200)$ y esto debe interpretarse de la siguiente forma: **cuando la producción es nula, los costos alcanzan a $200**. Es decir, coinciden con los costos fijos.

Veamos cómo se modificaría la situación, si el fabricante logra disminuir en un 50% el importe de los costos que intervienen en cada unidad producida, manteniéndose los 200 (miles de dólares) de costos fijos.

Advierte qué cambio ocasiona la nueva situación en la expresión analítica que habíamos hallado anteriormente:

Tabla 2

Cantidad de unidades producidas	Costo Total
0	200
1	$5.\mathbf{1}+200=205$
2	$5.\mathbf{2}+200=210$
3	$5.\mathbf{3}+200=215$
⋮	⋮
10	$5.\mathbf{10}+200=250$
x	$5.\ \boldsymbol{x}\ +200$

La nueva situación, tendría la siguiente representación gráfica:

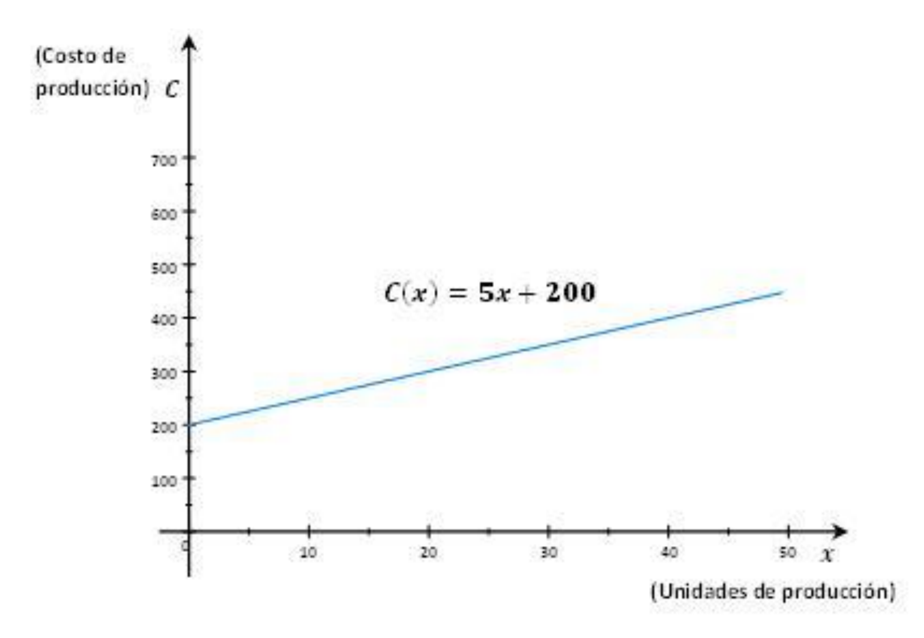


Figura 2

El Gráfico se Lee e Interpreta de la siguiente manera:

La Figura 2, muestra que su representación gráfica es una **línea recta**, que **crece 5 unidades por cada unidad que crece** x y se interpreta que **a medida que aumentan en una unidad la cantidad de productos elaborados, los costos crecen en $5**. Observen que el **corte con el eje de ordenadas** está representado por $(0{,}200)$ y esto debe interpretarse de la siguiente forma: **cuando la producción es nula, los costos alcanzan a $200**.

De las dos situaciones descriptas anteriormente, podemos observar que:

Observación:

- Las expresiones analíticas que corresponden a relaciones funcionales cuyas representaciones gráficas son líneas rectas, son polinomios de primer grado:

$$(1)\ C(x) = 10x + 200$$

$$(2)\ C(x) = 5x + 200$$

- Sus crecimientos se mantienen constantes:

En la expresión analítica (1) cuando la producción se incrementa en una unidad, el costo se incrementa en $ 10.

En (2) cuando la producción se incrementa en una unidad, el costo se incrementa en $ 5.

- Observa que 10 en un caso, y 5 en el otro, son los números que multiplican a x informando acerca del crecimiento de la función.

En (1) la función crece 10 unidades por cada unidad que crece x.

En (2) el coeficiente 5 indica que la función crece 5 unidades por cada unidad que crece x.

Estos coeficientes constantes 10 y 5 respectivamente se denominan **pendiente de la recta** y es el que determina la **inclinación que tiene la recta con respecto al eje de abscisas**.

El **término independiente** de las ecuaciones: 200, nos informa acerca de la intersección de la gráfica con el eje y.

Muchas otras situaciones que involucran el estudio de ciertos procesos que sufren modificaciones o variaciones, presentan determinadas características como las descriptas, por lo que es posible concluir:

2.1.1 Forma Pendiente - Intersección

La expresión analítica de una función que cambia a **Ritmo Constante** ante cambios de la variable independiente (x) y su representación gráfica es una línea recta y tiene la siguiente **Estructura**:

$$\boxed{y = mx + b}$$

Esta forma de ecuación de la recta se la denomina forma pendiente intersección debido a que representa a una recta que tiene **Pendiente m** y cuya **Intersección con el eje de Ordenadas** y es $(\mathbf{0}, \boldsymbol{b})$.

La Interpretación Geométrica de m y b

m → **Pendiente de la Recta**:

Da la magnitud y sentido del Cambio de y ante cambios de x, determinando la Inclinación de la Recta. La pendiente de la recta se obtiene a partir del cociente entre las variaciones de las variables dependiente e independiente, como veremos en el apartado siguiente.

b → **Ordenada al Origen**:

Es la INTERSECCIÓN de la RECTA con el eje y.

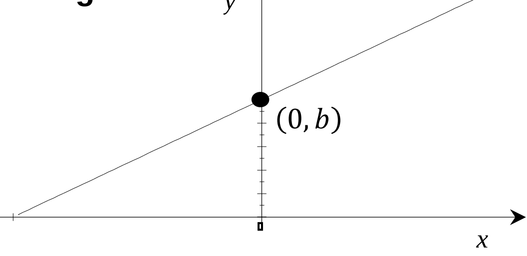
También se lo denomina CORTE CON EL EJE DE ORDENADAS.

Su representación gráfica es:

Se lo obtiene haciendo $x = 0$ en la expresión algebraica: $f(x) = mx + b$.

Entonces:

$f(0) = m.0 + b \Rightarrow f(0) = b$



RESUMIENDO:

La forma pendiente intersección de la ecuación de la recta nos brinda información geométrica sobre ella, ya que según vimos el **Signo** y **Valor** de m determina el **Crecimiento** o **Decrecimiento** de la **Función por cada unidad de crecimiento de la variable independiente**. En algunas funciones ocurre que a medida que la variable independiente aumenta, la variable dependiente también se incrementa por lo que a este tipo de funciones

las llamamos **crecientes**. En otras a medida que la variable independiente aumenta, la variable dependiente disminuye, entonces la función es **decreciente**.

El signo y valor de $\boxed{b}$ determina el punto de corte de la función al eje $\boxed{y}$ así b puede asumir valores **negativos, positivos o nulo**.

Veamos cómo podemos deducir la expresión algebraica que representa una función lineal, conocidas las coordenadas de dos puntos que pertenecen a dicha función:

DEFINICION DE PENDIENTE DE UNA RECTA:

La **Pendiente** $\boxed{m}$ de una recta **no vertical** que pasa por dos puntos de coordenadas conocidas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

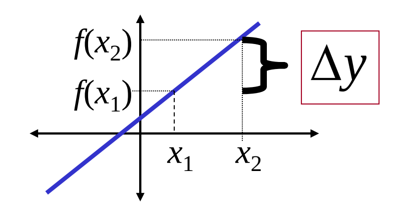
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se lee cambio en y sobre cambio en x

$\boxed{\Delta y}$: Se llama incremento absoluto de la función.

Se lee "delta y"

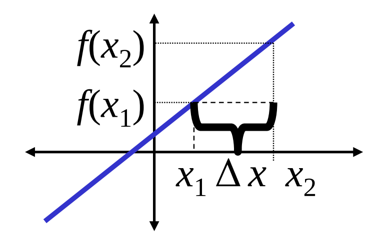
Gráficamente es:



$\boxed{\Delta x}$: Se llama incremento absoluto de la variable independiente.

Se lee "delta x"

Gráficamente es:



Observación:

Indistintamente podemos calcular la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ó $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Es decir que no importa el orden en que se reste, siempre que el orden en que las coordenadas se resten, provengan del mismo punto.

Ejemplo 2: Supongamos que deseamos encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1\,, -1)$ y $(-1\,, 3)$.

Hallar la ecuación de una recta significa hallar la pendiente y la ordenada al origen y reemplazarlas en la expresión algebraica:

$$y = f(x) = mx + b$$

En primer lugar debemos hallar la pendiente a través de la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tomemos, por ejemplo a $(x_1\,, y_1) = (1\,, -1)$ y a $(x_2\,, y_2) = (-1\,, 3)$

Entonces:

$$m = \frac{3-(-1)}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \therefore m = -2$$

Luego reemplazamos $m = -2$ en la expresión $y = mx + b$ y nos queda:

$$y = -2x + b \quad \textbf{(1)}$$

Ahora para obtener b tomamos cualquier punto de los dados, por ejemplo el. $(1\,, -1)$ y reemplazamos x e y en la fórmula **(1)**:

$$-1 = -2.1 + b \Rightarrow b = -1 + 2 = 1 \quad \therefore b = 1$$

De este modo la **Ecuación de la Recta** es:

$$\boxed{y = -2x + 1}$$

Algunas rectas presentan particularidades que merecen destacarse.

A continuación analizaremos dos casos especiales que se presentan cuando la recta es paralela a alguno de los ejes cartesianos.

2.1.2. Rectas Horizontales y Verticales

Anteriormente se definió la pendiente de una recta como la razón entre:

$$\frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si la recta es **Horizontal,** todo punto sobre la recta tiene la misma coordenada y.

Su **Ecuación** es de la forma: $\boxed{y = b}$

Gráficamente es:

Ejemplo 3: La recta que pasa por los puntos $(-3\,,-5)$ y $(2,-5)$.

En donde su pendiente es: $m = \frac{-5-(-5)}{2-(-3)} = \frac{0}{5} = 0$

Luego: $y = 0.x + b$, ahora reemplazamos x e y por las coordenadas de cualquier punto dado: $-5 = 0.2 + b \Rightarrow b = 5$.

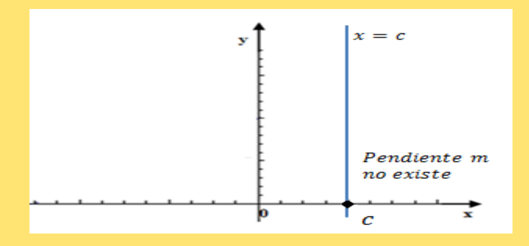
Así, la **Ecuación de la Recta** es: $\boxed{y = -5}$

Analicemos ahora el caso de la recta paralelas al eje y.

Si la recta es **VERTICAL,** todo punto sobre la recta tiene la misma coordenada x. Toda recta vertical **no es una función lineal.**

Su **ECUACIÓN** es de la forma: $\boxed{x = c}$, donde la constante c es el valor de abscisa de todos los puntos que pertenecen a la recta.

Gráficamente es:

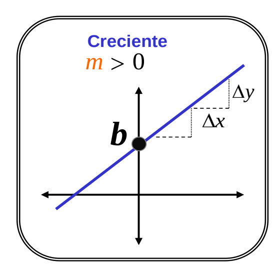


Ejemplo 4: Busquemos la recta que pasa por los puntos $(4,1)$ y $(4,-2)$. Lo primero que intentaríamos encontrar es su pendiente: $m = \frac{-2-1}{4-4} = \frac{-3}{0}$ *no existe* (la división por cero no existe). La ordenada al origen $\boldsymbol{b}$, tampoco existe ya que al ser la recta vertical es paralela al eje y por lo tanto no corta a dicho eje. Esto nos permite concluir que la recta vertical no puede expresarse de la forma $y = mx + b$. Su ecuación es $x = c$, siendo c el valor de abscisa de todos los puntos de la recta y consecuentemente el punto en que la recta corta al eje de abscisas. $\boxed{x = c}$ Representa una relación que no es función. En el ejemplo considerado la ecuación sería $\boxed{\boldsymbol{x = 4}}$.

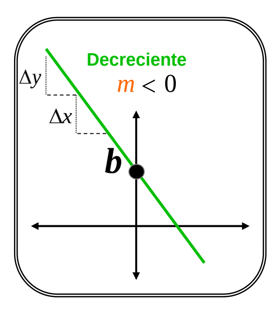
RESUMIENDO:

PENDIENTE: m :

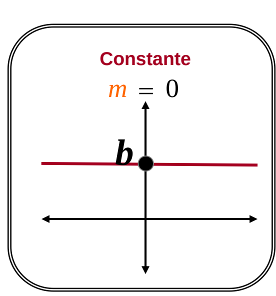
Sí $m > 0$, la Función Lineal es **Creciente** y es una recta orientada del III al I Cuadrante:



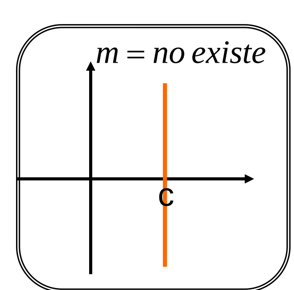
Sí $m < 0$, la Función Lineal es **Decreciente** y es una recta orientada del II al IV Cuadrante:



Sí $m = 0$, la Función Lineal es **Constante** y es una recta horizontal:



Sí $m = \ no\ existe$, **NO ES Función** y es una recta vertical



RECTAS PARALELAS y PERPENDICULARES.

Hemos visto que la **Pendiente** de una recta, determina su inclinación.

- Entonces decimos que dos rectas son **PARALELAS** entre sí, si tienen la misma inclinación respecto al eje x: Es decir, sus **pendientes son iguales**.

En Símbolos:

Rectas Paralelas:

Condición de **Paralelismo**

Dos rectas:

$$y = m_1 x + b_1$$

$$y = m_2 x + b_2$$

Son paralelas $\leftrightarrow m_1 = m_2$

Ejemplo 5:

Las rectas:

$y = 3x - 5$ y $y = 3x - 15$

Son paralelas ya que sus pendientes son iguales

- Dos líneas no verticales son **PERPENDICULARES** si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario:

En Símbolos:

Rectas Perpendiculares:

Condición de **Perpendicularidad**

Dos rectas:

$$y = m_1 x + b_1$$

$$y = m_2 x + b_2$$

Son perpendiculares $\leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Ejemplo 6:

Las rectas:

$y = \frac{1}{2}x + 5$ e $y = -2x + 15$

Son perpendiculares pues sus pendientes son recíprocas y de signos contrarios

Hemos visto que teniendo como dato la pendiente de una recta y la intersección con el eje y, es posible hallar la expresión algebraica que la representa, obteniendo la forma **PENDIENTE INTERSECCIÓN** *de la ecuación de una recta.*

Seguidamente, veremos que también podemos expresarla algebraicamente, si disponemos como dato, la **Pendiente** *y un* **Punto** *cualquiera que pertenezca a la recta.*

2.1.3 Forma Punto – Pendiente de la Ecuación de una Recta

Supongamos que **conocemos** de una recta, la **PENDIENTE** m y las coordenadas de un **PUNTO** cualquiera que pertenezca a la recta: (x_0, y_0).Si a su vez (x, y) es cualquier otro punto sobre la recta, utilizando la fórmula de la pendiente para los dos puntos, se debe cumplir que:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Multiplicamos miembro a miembro por $(x - x_0)$

Esta última expresión nos permite hallar la ecuación de una recta teniendo como datos la **Pendiente** y las coordenadas de un **Punto**.

Ejemplo 7: Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = -2$ y que pasa por el punto de coordenadas $(1,5)$

Los datos que tenemos para hallar la ecuación de la recta son:

Pendiente: $m = -2$ y pasa por el **Punto:** $(1,5)$. Luego, usamos la fórmula **Punto – Pendiente**: $y - y_0 = m(x - x_0)$, considerando que

$(1{,}5) = (x_0, y_0)$. Entonces tenemos que: $y - 5 = -2(x - 1)$ de donde al hacer las cuentas y despejando y obtenemos la **Ecuación de la Recta**:

$$\boxed{y = -2x + 7}$$

2.1.4 Aplicaciones de las Funciones Lineales

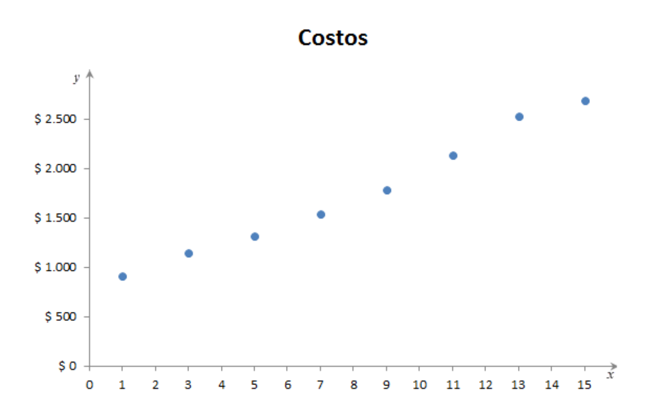
Las funciones lineales se aplican a diversas situaciones que se presentan en la vida real. Uno de los casos más comunes es usarla para construir una función lineal que aproxime los datos reales. Esa función proporciona un modelo lineal de la situación, que puede usarse para predecir comportamientos futuros.

Un ejemplo de esta situación la presenta un estudio realizado en los E.E.U.U. que registra el costo anual promedio en las universidades públicas durante los años 1981 y 1995. Los datos del estudio vienen dados por la siguiente tabla:

Años	**1981**	**1983**	**1985**	**1987**	**1989**	**1991**	**1993**	**1995**
Costos	**$909**	**$1148**	**$1318**	**$1537**	**$1781**	**$2137**	**$2527**	**$2686**

Tabla 3:
Fuente: Lial Margaret "Matemáticas para Administración e Economía". Edit. Prentice Hall Pág. 137

Antes de representar estos datos en un gráfico, realicemos la siguiente equivalencia: consideremos que $x = 1$ corresponde a 1981, $x = 3$ corresponde a 1983 y así sucesivamente. Esta equivalencia nos permite que la representación de los pares ordenados, de la Tabla 3, en un sistema de ejes cartesianos presenten la siguiente forma:



Observemos que: Los puntos en la figura no se encuentran sobre una recta, pero se acercan bastante a un modelo lineal.

Existen varios métodos para encontrar una recta de "mejor ajuste" que serán estudiados más adelante en otra asignatura, pero mientras tanto usando un enfoque simple se pueden seleccionar dos puntos en la figura, por ejemplo: $(1, 909)$ y $(11, 2137)$ y se dibuja la recta que determinan como lo muestra la figura 6:

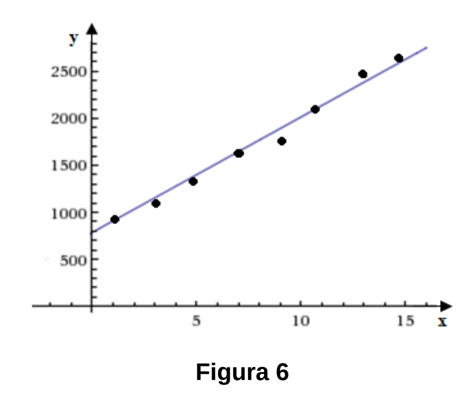


Figura 6

Fuente: Lial Margaret "Matemáticas para Administración e Economía". Edit. Prentice Hall Pág. 137

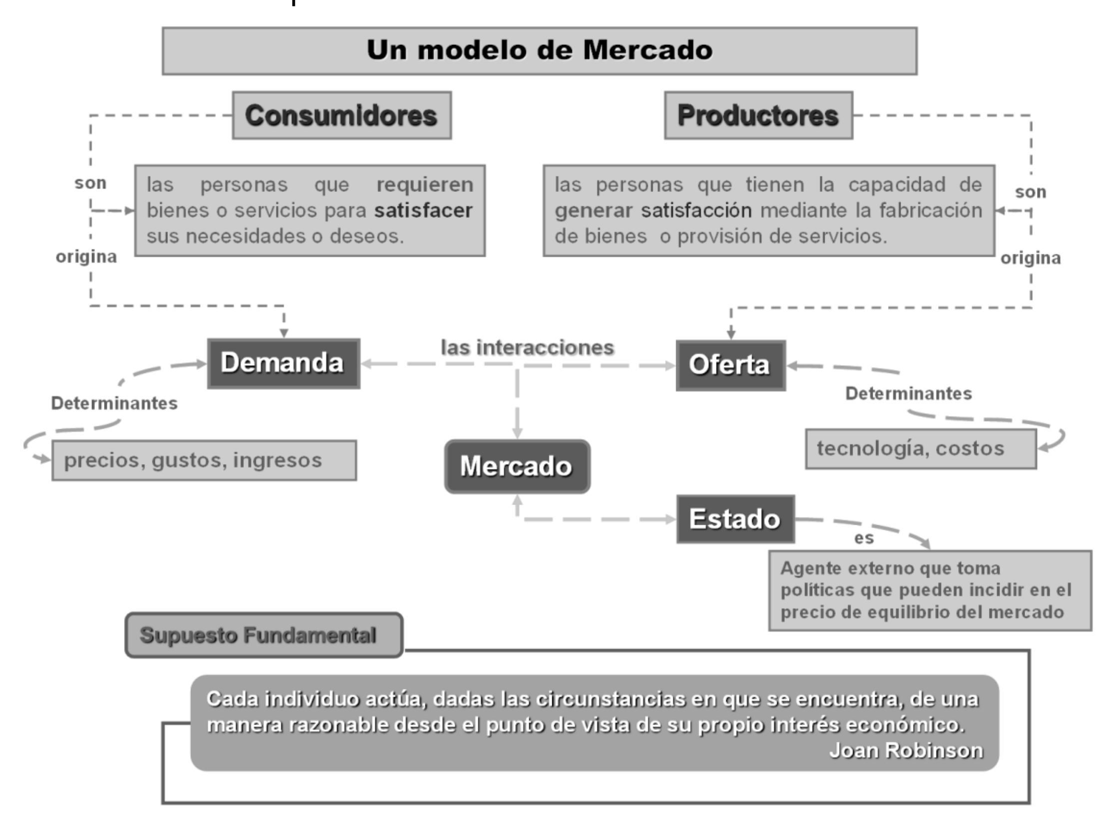
De este modo, todos los puntos de la Tabla 3 se encuentran razonablemente cerca de esa recta. Y la recta que pasa por los puntos $(1, 909)$ y $(11, 2137)$ tiene como expresión algebraica $f(x) = 122{,}8x + 786{,}2$, con lo cual proporciona un modelo lineal de la situación y puede usarse con precaución para pronosticar el comportamiento de los costos.

Si bien estas aplicaciones las estudiaras cuando curses asignaturas como estadística, te contamos que los **modelos** son representaciones basados en las teorías que permiten realizar estimaciones de los efectos que se pueden seguir de cambios en algunos datos reales. Los modelos son muy utilizados por la Ciencias Económicas. Están basados en unos supuestos que simplifican la realidad y formados generalmente por ecuaciones matemáticas que relacionan distintas variables. Un modelo es una estructura simplificada del mundo real que depende de varias generalizaciones y suposiciones.

A continuación presentamos una de las aplicaciones más importantes de las funciones lineales en Administración y Economía, cuando se relaciona cantidades demandas y ofertadas.

GRÁFICAS LINEALES DE OFERTA Y DEMANDA - EQUILIBRIO DE MERCADO

Brevemente te presentamos un esquema de los componentes que integran lo que en Economía se denomina Mercado. Este concepto será estudiado en detalle en la asignatura Principios de Economía I que cursaras en el segundo cuatrimestre de este primer año:

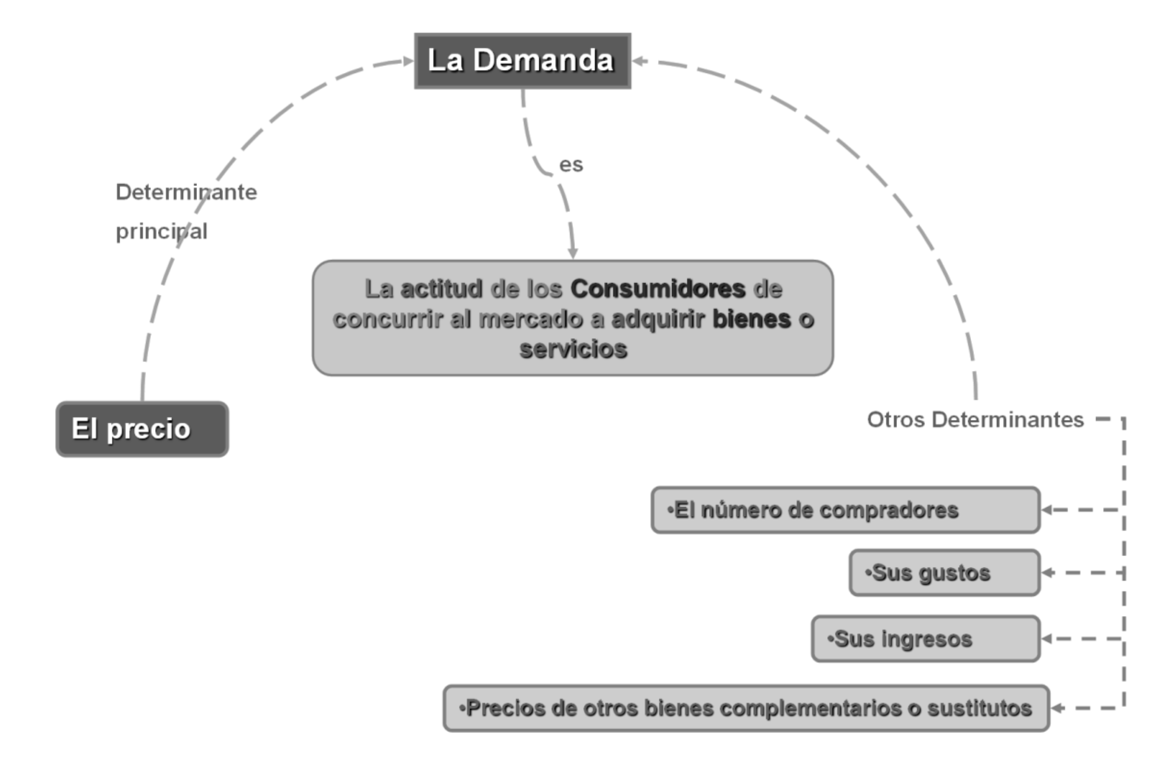


La oferta y la demanda para un cierto artículo están usualmente relacionadas con su precio. En realidad, tanto la cantidad de productos que **demandan** los consumidores, así como la cantidad de productos que **ofertan** los fabricantes dependen de un cierto número de circunstancias variables como pueden serlo: el precio del producto, el precio de otros productos que pueden sustituirlo, el ingreso de los consumidores, los gustos, las costumbres, etc.

Sin embargo, haciendo un análisis económico elemental, se considera a la demanda y a la oferta como funciones solamente de la variable más importante, que por lo general es el **Precio** del producto.

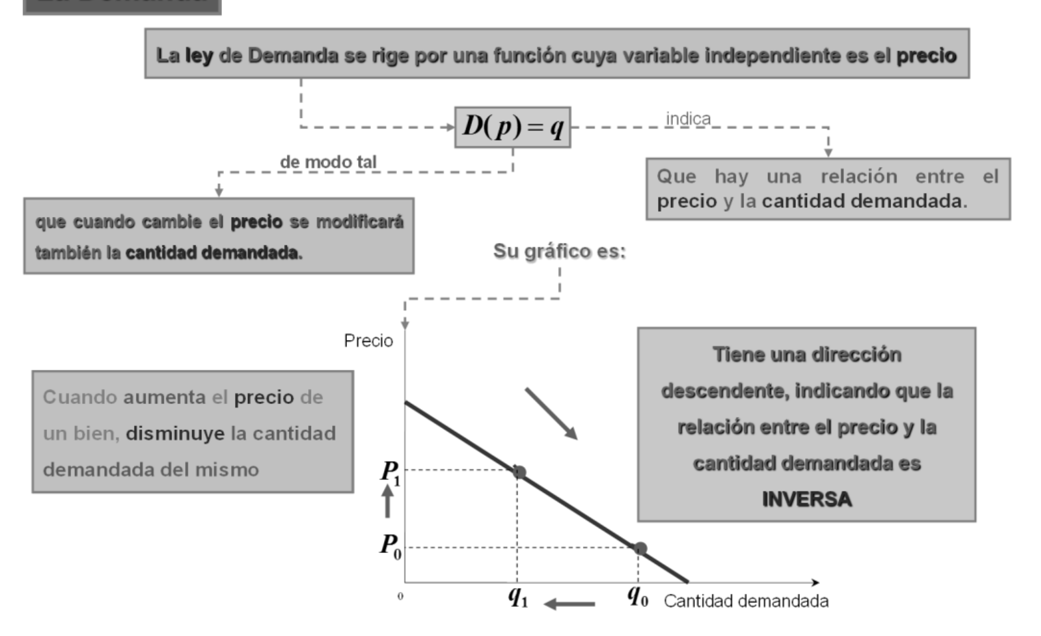
DEMANDA:

Para cada precio de un producto, existe una cantidad de ese producto que los consumidores demandan (compran) en un determinado período que por lo general es una semana. El siguiente esquema muestra las variables que componen a la demanda:



En el comportamiento de la demanda más común, a mayor precio, menor es la cantidad que se demanda y por el contrario si se reduce el precio, aumenta la cantidad demandada. Por ello, generalmente la pendiente de una línea recta de demanda es negativa.

La ecuación que relaciona el precio por unidad de producto (p) y la cantidad demandada del producto (q) se denomina ecuación de demanda. La Ecuación de la **Demanda** y su **Gráfico** se muestran en el siguiente esquema:



NOTA: a pesar de que la variable independiente es el precio p, la mayor parte de los economistas representa a la variable q en el eje horizontal y al precio p en el eje vertical. Además su gráfico sólo se dibuja en el primer cuadrante ya que la demanda sólo tiene sentido para valores positivos de p y de q.

Ejemplo 8: Un economista ha estudiado la demanda para chapas de aluminio y ha determinado que el precio por unidad p y la cantidad demandada q, se relacionan por la ecuación lineal:

$$p = -\frac{3}{4}q + 60$$

Y su gráfico es:

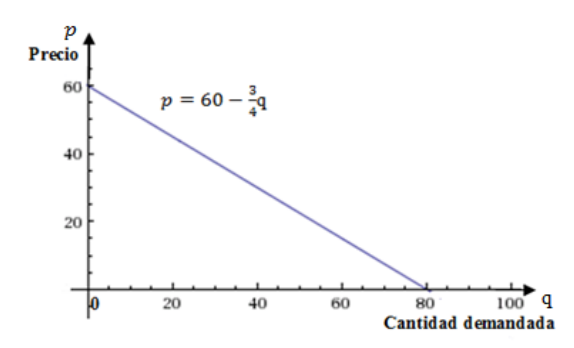
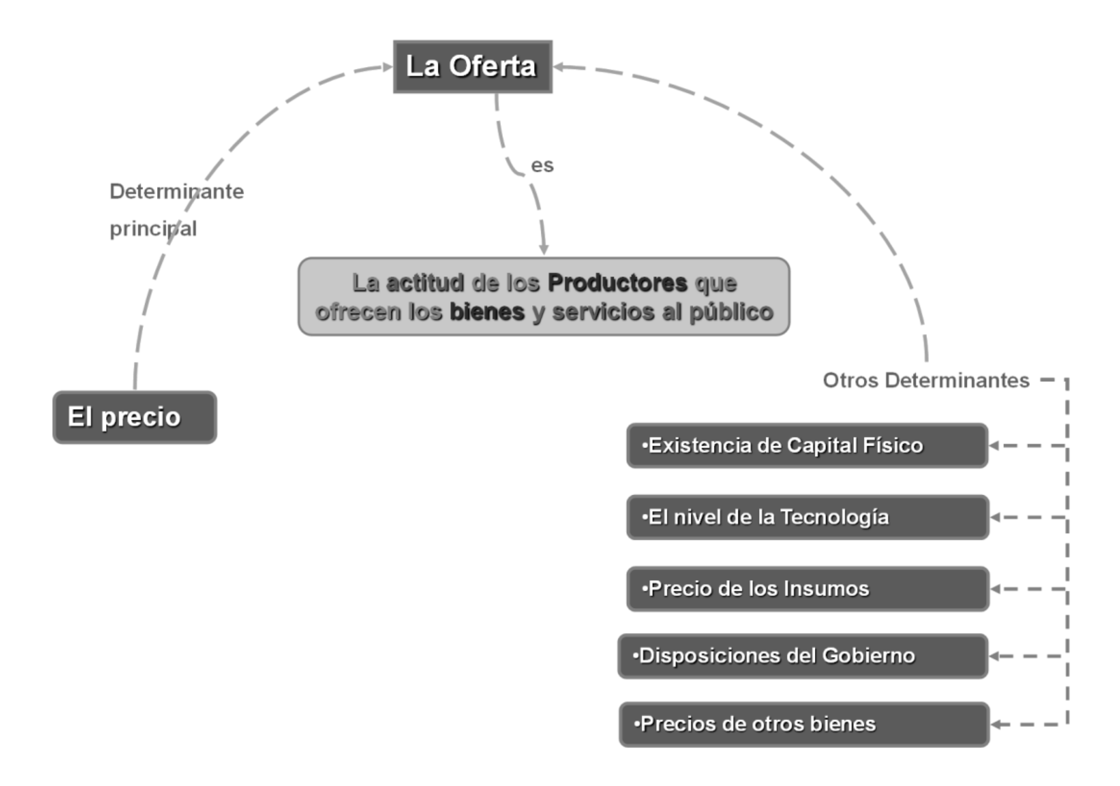


Figura 7

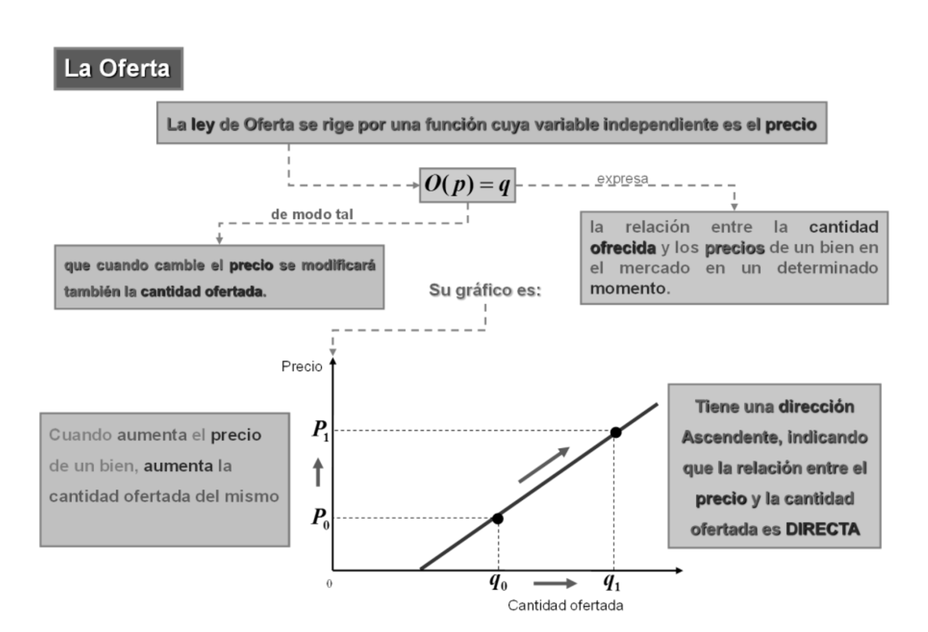
OFERTA:

En respuesta a diversos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en un período específico (generalmente una semana). El siguiente esquema muestra las variables que componen a la oferta:



Por lo general, cuanto mayor es el precio unitario, mayor será la cantidad de artículos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer, al reducirse el precio, se reduce también la cantidad ofertada, por lo que lo más común será que la recta que represente la oferta tenga pendiente positiva, ascendiendo de izquierda a derecha.

La ecuación que relaciona el precio por unidad de producto (p) y la cantidad ofertada del producto (q) se denomina ecuación de oferta. La Ecuación de la **Oferta** y su **Gráfico** se muestran en el siguiente esquema:



NOTA: En el caso de la gráfica de oferta, también es válida la aclaración que se hizo para las gráficas de demanda:

- Se consideran las porciones de gráficas que aparecen en el primer cuadrante.
- Se representa la variable q (cantidad ofertada) en el eje horizontal y la variable p (precio) en el eje vertical

Ejemplo 8: El economista del ejemplo anterior también estudió la oferta y concluyó que la cantidad ofertada q se relaciona con su precio p por la ecuación de oferta: $p = 0{,}85q$

Y su gráfico es:

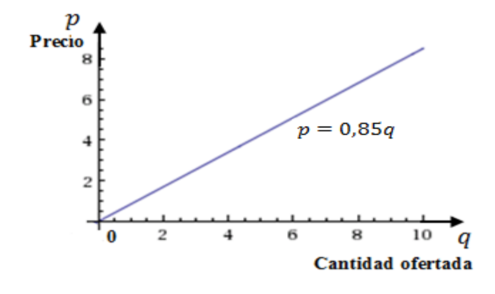


Figura 8

Representemos ahora en un mismo sistema de ejes coordenados, las gráficas de **Demanda** y de **Oferta** de chapas de aluminio que se analizaron precedentemente:

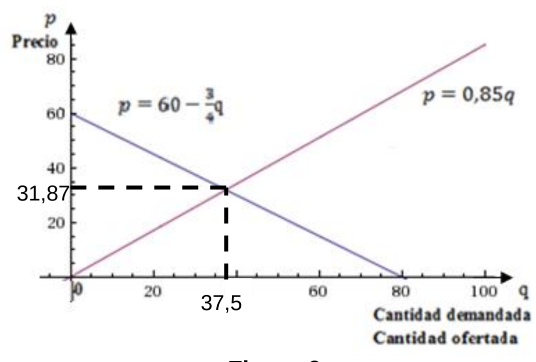


Figura 9

Observación:

En el gráfico se puede apreciar que la **Oferta** y la **Demanda** son iguales en el punto en que la gráfica de la oferta intercepta la gráfica de la demanda. Este punto se lo denomina **PUNTO DE EQUILIBRIO** y sus coordenadas son:

1era coordenada: la **cantidad** que se demandará y ofrecerá en el precio de equilibrio es de 37,5

2da coordenada: el **precio** de equilibrio en el que se demanda y ofrece la misma cantidad: $ 31,87

En este punto nos preguntamos: ¿Cómo se obtuvo el ***Punto de Equilibrio****?*

Si dadas las dos ecuaciones de **oferta** y **demanda** se quiere determinar algebraicamente (no a través del gráfico) el **punto de equilibrio**, lo que debemos hacer es formar con las dos ecuaciones un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y luego resolver por cualquiera de los métodos estudiados en el secundario:

En nuestro caso teníamos las siguientes ecuaciones:

DEMANDA: $p = -\frac{3}{4}q + 60$

OFERTA: $p = 0{,}85q$

Formamos el sistema de ecuaciones y resolvemos por igualación:

$$\begin{cases} p = -\frac{3}{4}q + 60 \\ p = 0{,}85q \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{4}q + 60 = 0{,}85q \Leftrightarrow 60 = \frac{3}{4}q + 0{,}85q \Leftrightarrow q = 37{,}5$$

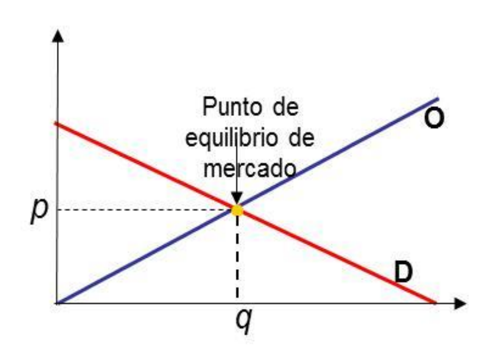
El número de unidades para el cual la oferta igualará a la demanda es de 37,5 unidades.

Para obtener la coordenada precio de equilibrio, se sustituye $q = 37{,}5$ en la ecuación de la oferta o en la ecuación de la demanda, así:

$$p = -\frac{3}{4}(37{,}5) + 60 \Rightarrow p = \$31{,}87$$

Este es el precio de mercado al cual la oferta iguala a la demanda

GRÁFICAMENTE el punto de equilibrio es:



La coordenada p de este punto es el precio de mercado para el cual no habrá escasez ni excedente del artículo. Se dice que habrá **Escasez** de productos en el mercado cuando la **Demanda** **SUPERE** a la **Oferta**. Por el contrario, existirá **Excedente** del producto cuando la **Oferta** **SUPERE** a la **Demanda**.

Otra aplicación importante de las funciones lineales es el análisis de las ganancias o pérdidas que obtiene un fabricante a partir del comportamiento de sus funciones lineales de **ingresos** *y de* **costos**.

GANANCIA-INGRESOS Y COSTOS

En una situación de fabricación y ventas, la relación básica es:

$$\boxed{GANANCIA = INGRESOS - COSTOS}$$

Tanto el ingreso como el costo pueden describirse en términos de ecuaciones y la intersección de ambas determinará el punto donde el **Beneficio es Nulo**, que es donde el **Ingreso** es **igual** al **Costo**.

Cuando el **Ingreso** **supera** al **Costo** el fabricante obtendrá **Ganancia** y a la inversa cuando el **Costo** supere a los **Ingresos** el fabricante **Perderá**.

A modo de ejemplo te mostraremos la siguiente situación

Ejemplo 9: Una empresa que produce alimentos para pollos encuentra que el costo total C de producir x unidades está dado por:

$$C(x) = 20x + 100$$

La gerencia planea cobrar $24 por unidad. La ecuación de ingresos será: $I(x) = 24x$

¿Cuántas unidades deben venderse para que se alcance el punto de **Beneficio Nulo**?

La empresa alcanzará el punto de **Beneficio** **Nulo** (ganancia cero), cuando los **Ingresos** igualen a los **Costos**, es decir cuando:

$$\boxed{I(x) = C(x)}$$

En el ejemplo:

$$24x = 20x + 100 \Rightarrow x = 25$$

Rta: La empresa alcanza el punto de beneficio nulo al vender **25 unidades**.

Nota: Si la empresa produce **más** de 25 unidades obtendrá **Ganancia**, si produce **menos** de 25 unidades, el fabricante tendrá **Pérdidas**.

Gráficamente la situación es:

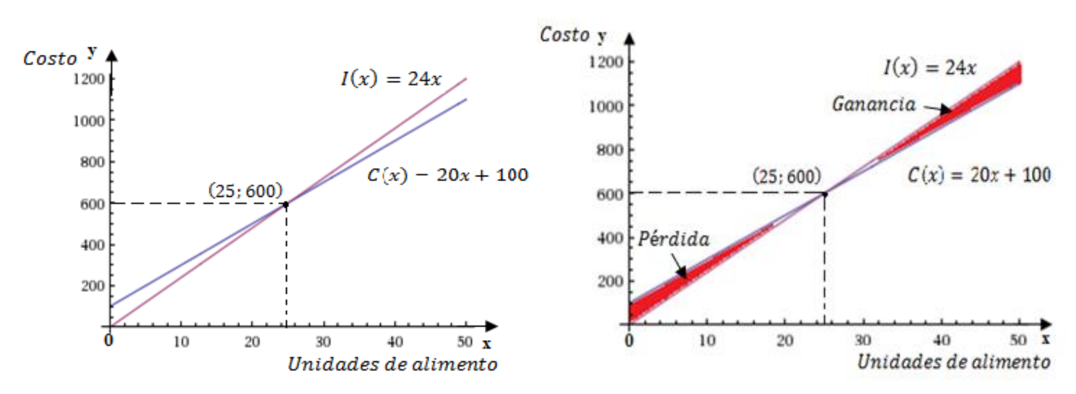


Figura 10

Fuente: Lial Margaret "Matemáticas para Administración e Economía". Edit. Prentice Hall .

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 1:

Si se conoce que los ingresos que obtiene un fabricante crecen:

a) A un ritmo constante de $10 por unidad producida, ¿Qué tipo de ecuación o expresión analítica representa la relación entre **cantidad de unidades producidas** e **ingresos**?

b) ¿Qué elemento se conoce de la fórmula que representa la relación funcional?

c) ¿Cuál sería el dato conocido de la fórmula que relaciona ambas variables si cada 5 unidades producidas los ingresos crecieran $ 200?

d) ¿Y si ahora los ingresos crecen $ 250 por cada 10 unidades, qué dato tendríamos de la fórmula?

Actividad 2:

¿Cuál es el ritmo al que crecen los costos de una empresa si la gráfica que los representa crece verticalmente 6 unidades por cada 3 unidades en que crece horizontalmente?.

Actividad 3:

¿A qué ritmo decrece la demanda de un artículo si la gráfica que la representa decrece verticalmente 3 unidades por cada 4 unidades en que crece horizontalmente?.

Actividad 4:

Encuentra las expresiones analíticas que representan las relaciones funcionales que crecen a ritmo constante, conociendo que:

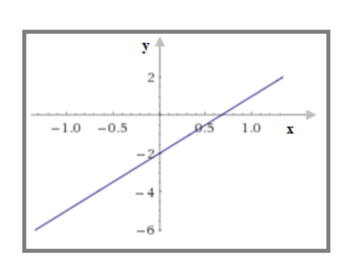
a) $f(2) = 10$ y $f(7) = 40$

b) $f(-1) = -5$ y $f(-3) = -7$

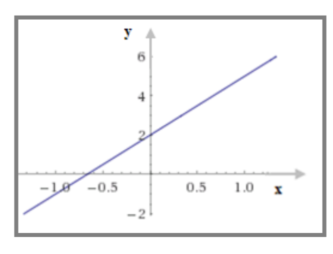
Actividad 5:

Asocia cada ecuación con la recta que más se parece a su gráfica:

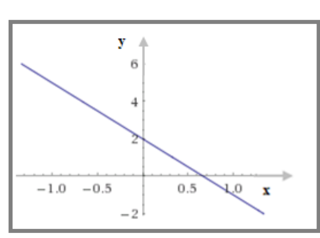
a) $y = 3x + 2$



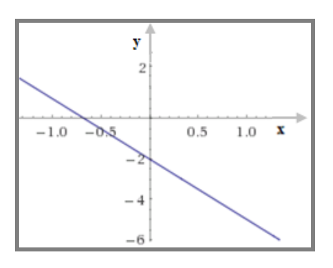
b) $y = -3x + 2$



c) $y = 3x - 2$



d) $y = -3x - 2$



Actividad 6:

Si la fórmula que representa la relación funcional entre unidades producidas (x) y Costo Total (C) es: $C(x) = 3x + 10$

a) Calcula el costo si las unidades producidas son 500.
b) Calcula las unidades producidas si el costo es $ 2.110.
c) Encuentra una fórmula que represente:
   i. un costo que crezca más rápido
   ii. un costo que crezca igual a la dada pero que sus costos fijos sean un 150 % mayor

Actividad 7:

Obtiene la ecuación de una recta que:

a) Pase por dos puntos de coordenadas conocidas: $(1, 4)$ y $(2, 8)$

b) Pase por el punto $(2{,}4)$ y no interseca al eje y
c) Pase por el origen y sea horizontal.
d) Sea vertical y pase por $(-2,-1)$
e) Tiene pendiente -4 y $f(2) = 8$

Actividad 8:

¿Crece o decrece la función $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -4$. ¿A qué ritmo?

Actividad 9:

El costo de producir 10 unidades de un tipo de calculadora financiera es de \$1000. Si el ritmo al que crece el costo es constante e igual a \$40, encuentra el valor al que asciende el costo fijo (independiente de las calculadoras producidas).

Actividad 10:

Supone que la demanda y el precio de una cierta marca de shampoo están relacionados por: $p = 16 - \frac{5}{4}q$

Donde q, representa las unidades expresadas en litros, siendo $0 < q < 12{,}8$

a) Encuentra la cantidad demandada de shampoo para un precio de $ 11.
b) Encuentra la ecuación que representa la oferta del mismo shampoo con su precio, conociendo que cuando el precio es de $ 9 se ofertan 12 unidades y que cuando el precio es de $8 se ofertan 6 unidades.
c) Determina el punto de equilibrio entre la demanda y la oferta del shampoo. Interpreta el significado de ese punto y analiza qué sucede si el precio es menor o mayor al de equilibrio.

Actividad 11:

El costo de fabricar x artículos está dado por la ecuación: $C(x) = 45x + 6000$. Además cada artículo puede venderse a $60.

a) Halla el Punto de Beneficio Nulo.
b) Halla el intervalo para el cual el fabricante obtiene ganancias teniendo en cuenta que la capacidad máxima de producción de la empresa es de 600 unidades mensuales.

2.2 Funciones Cuadráticas

Hasta ahora nos hemos concentrado en datos económicos que admiten una representación lineal, sin embargo no siempre, una colección de datos admite un modelo lineal por lo tanto pese a la utilidad y comodidad que ofrecen los modelos lineales, existen fenómenos que no se comportan de modo lineal y, por lo mismo, no pueden aproximarse adecuadamente por medio de funciones lineales.

A veces, como es posible advertir en el gráfico siguiente, la nube de puntos que representa la colección de datos responde a otro modelo.

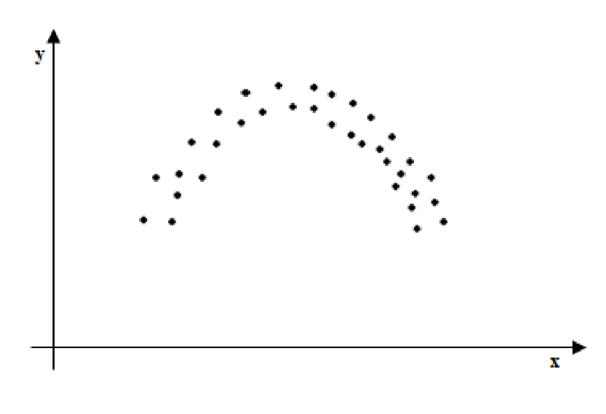


Figura 11

Fuente: Larson Roland E. "Cálculo y Geometría analítica" Edit. MC Graw Hill.

En esta sección estudiarás las particularidades que caracterizan a las **FUNCIONES CUADRÁTICAS**, que es el tipo de función que mejor representa la colección de datos que origina el gráfico de la figura precedente.

Recuerden que si la función es **Lineal** la variable dependiente y cambia en proporción directa con el cambio de la variable independiente x. En las funciones no lineales, la respuesta de la variable dependiente no se encuentra en proporción directa a los cambios de la variable independiente.

Veamos un ejemplo muy conocido.

Ejemplo: $y = f(x) = x^2$, aquí la variable **DEPENDIENTE** y se calcula elevando al cuadrado el valor de la variable **INDEPENDIENTE** x. Por lo tanto los cambios de y ni son **constantes** ni son **proporcionales** con los cambios de x

Una **función cuadrática** es una función cuya expresión algebraica está dada por un polinomio de segundo grado, del tipo:

$$g(x) = 3x^2 + 30x + 67 \quad ; \quad h(x) = -x^2 + 4x \quad ; \quad f(x) = x^2$$

2.2.1. Definición y Elementos

Una función cuadrática es una función cuya expresión algebraica es un polinomio de segundo grado, es decir que es de la forma:

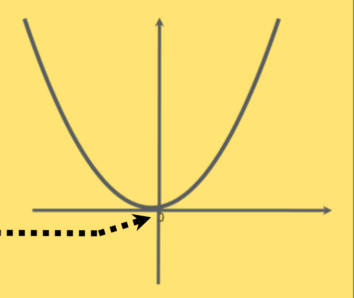
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a , b y c son valores reales y $a \neq 0$.

Cuyo Dominio de definición es el Conjunto de los Números Reales:

$$\boxed{Dom\ f : IR}$$

Su representación Gráfica es una Parábola:



Su Imagen depende de la ubicación del vértice

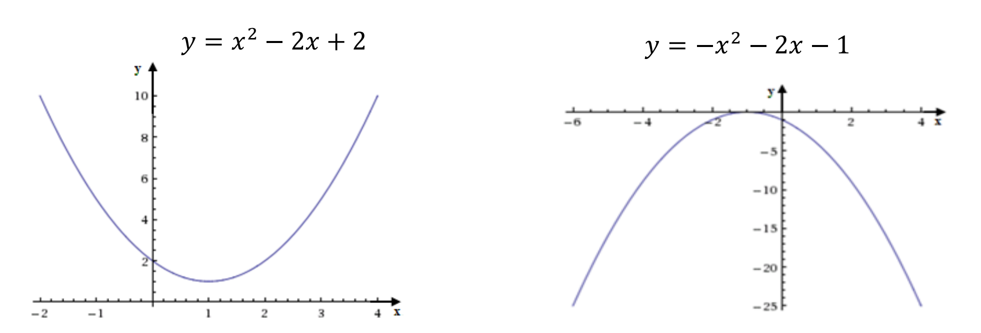
- a **: coeficiente del término cuadrático.**
- b **: coeficiente del término lineal.**
- c **: Término independiente**

Observación:

- La razón por la cual el coeficiente a no puede ser igual a cero es porque si esto sucede, la ecuación se transforma en: $y = bx + c$ que es una función lineal, mientras que b y c pueden adoptar cualquier valor.
- Si en una función cuadrática el coeficiente del término lineal o el término independiente o ambos son ceros, la función se denomina cuadrática de forma incompleta como en el caso de los siguientes ejemplos: $h(x) = -x^2 + 4x$ y $f(x) = x^2$

Las funciones cuadráticas tienen muchas aplicaciones en las ciencias económicas, por lo que profundizaremos su estudio reconociendo la información que nos brindan los coeficientes a, b y c que aparecen en su fórmula, así como los rasgos más relevantes de sus comportamientos gráficos.

Comencemos observando algunos comportamientos gráficos y las ecuaciones correspondientes a las funciones cuadráticas que a continuación se muestran:



FUNCIÓN CUADRÁTICA CÓNCAVA HACIA ARRIBA **FUNCIÓN CUADRÁTICA CÓNCAVA HACIA ABAJO**

Figura 12

Conocer la concavidad y algunos otros puntos fundamentales como la localización del vértice, la intersección del eje y la o las intersecciones con el eje x, permite un trazado rápido de su gráfica.

Al graficar una función cuadrática, se obtiene una curva que recibe el nombre de **PARÁBOLAS** y todas tienen la misma forma básica "cóncava", aunque la concavidad puede ser ancha o estrecha.

Las parábolas son simétricas con respecto a una recta vertical, denominada **eje de simetría** de la parábola. El eje **no** forma parte de la parábola, pero es un auxiliar útil para trazar su gráfico. La **intersección** de la parábola con su eje se llama **vértice**.

Gráficamente los anteriores elementos de la **PARÁBOLA** son:

Parábola: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

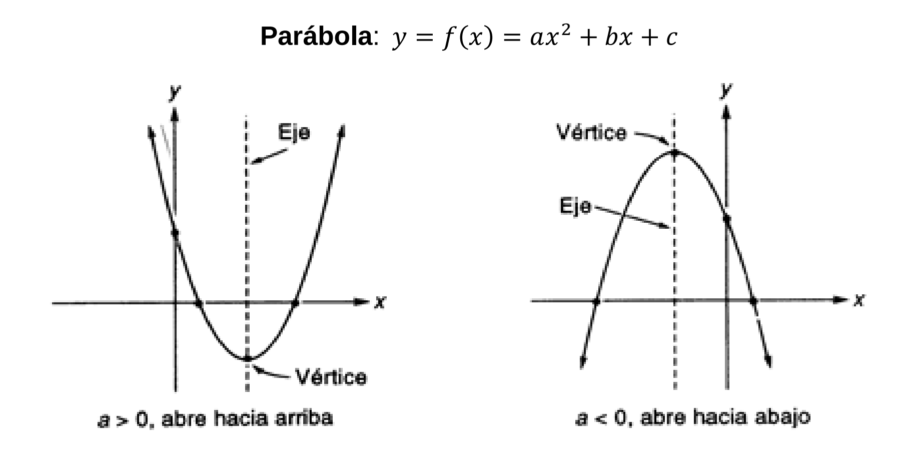


Figura 13

Fuente: Haeussler, Ernest E. "Matemáticas para Adm., Economía, Cs. Sociales y de la Vida". Edit. Prentice Hall

¿Cómo obtenemos el eje simetría?

La **Ecuación del Eje de Simetría**, es la **Recta Vertical:**

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Cuando una parábola se abre hacia arriba, su punto más bajo se llama **Vértice**. Cuando una parábola se abre hacia abajo, su **Vértice** es el punto más alto.

Vértice:

Es el **Punto** de coordenadas: $(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Además de estos elementos tan importantes para graficar parábolas analizaremos cómo los valores de los coeficientes $\boldsymbol{a}$ *,* $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ *determinan el comportamiento gráfico de la función cuadrática.*

2.2.2. Análisis de los coeficientes y comportamiento gráfico de la Función Cuadrática

En toda Función Cuadrática: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$:

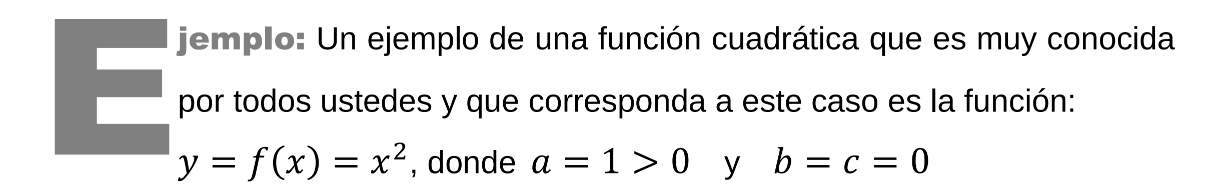
- $\boxed{a}$: indica la **ORIENTACIÓN** de las **RAMAS** de la parábola.
- $\boxed{b}$: indica el **DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL**
- $\boxed{c}$: es el **CORTE** de la parábola con el **eje** de **ORDENADAS**

Consideramos la situación que se presenta cuando algunos de los coeficientes constantes b o c son nulos:

1er CASO:

$$\boxed{a > 0 \text{ y } b = c = 0} \Longrightarrow f(x) = ax^2$$

Observen que al ser b y c iguales a cero la parábola es incompleta y de la forma: $\boxed{f(x) = ax^2 + 0b + 0c = ax^2}$



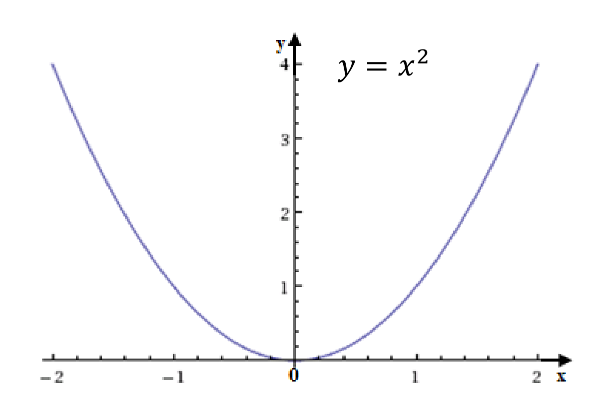
Ejemplo: Un ejemplo de una función cuadrática que es muy conocida por todos ustedes y que corresponda a este caso es la función: $y = f(x) = x^2$, donde $a = 1 > 0$ y $b = c = 0$

- Al ser $a > 0$, las ramas de la parábola se extienden hacia arriba (en el sentido positivo del eje y)

Utilizando los conceptos de **intersección** y de **simetría,** es posible aproximar rápidamente su comportamiento gráfico:

- Se trata de una función **PAR**, por lo que será simétrica con respecto al eje de ordenadas, es decir que el **eje de simetría** de la parábola coincide con el eje y.
- La **intersección-y** es el punto de coordenadas (0,0). Pues: $f(0) = 0^2 = 0$
- La **intersección-x** es el punto de coordenadas (0, 0). Se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación $f(x) = x^2$ y despejar x. Luego, $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.
- En este caso el **vértice** es el origen del sistema cartesiano: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = (0,0)$

Con todos estos elementos su **Gráfica** es:



Observación:

Tanto para valores de x positivos como para x negativos la ordenada y es positiva, por lo tanto, excepto el vértice, la curva está en el semiplano superior con respecto al eje x (1º y 2º cuadrante).

Si dentro de este mismo caso, analizas los cambios que se producen cuando el coeficiente a es mayor o menor (siempre con signo positivo), podrás apreciar que en un caso la curva es más cerrada denotando un crecimiento más rápido y en el otro la curva es más abierta de crecimiento más lento:

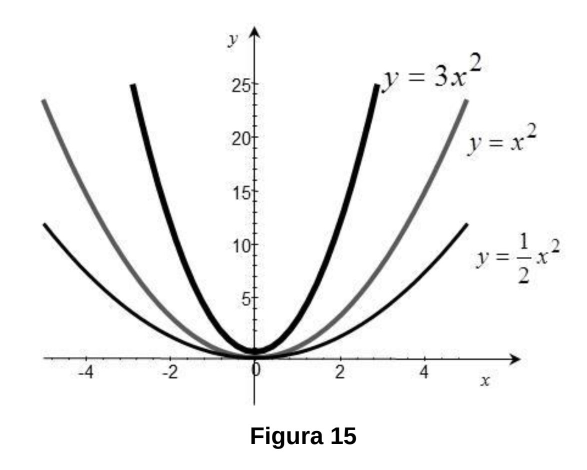


Figura 15

Seguidamente se analizará el cambio que se produce en la parábola si, aparte del coeficiente a, existe algún otro coeficiente distinto de cero.

2^do^ CASO:

$a > 0$ y $b = 0$ y $c \neq 0$ ⟹ $f(x) = ax^2 + c$ (1)

Si recordamos el concepto de **DESPLAZAMIENTO** y lo aplicamos a este caso, concluimos que la función que aparece en (1) se puede obtener luego de sumar una constante c a la función $f(x) = x^2$.

La suma de la constante c **desplazará verticalmente** a la parábola, tantas unidades como lo indique el valor de c.

Gráficamente:

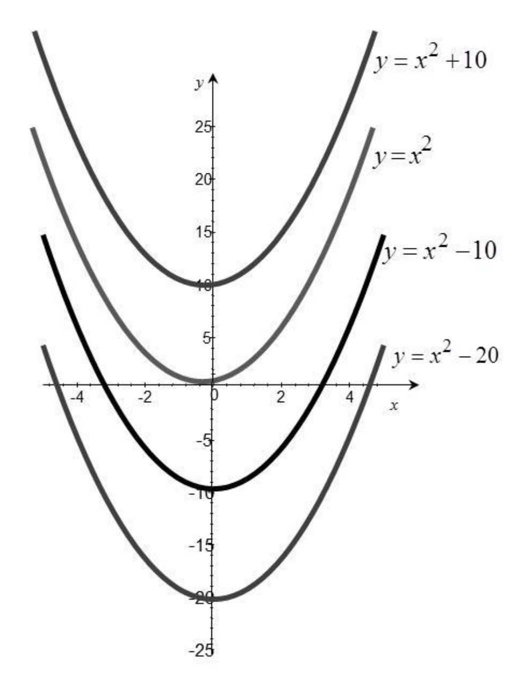


Figura 16

3er CASO:

$a > 0$ y $b \neq 0$ y $c \neq 0$

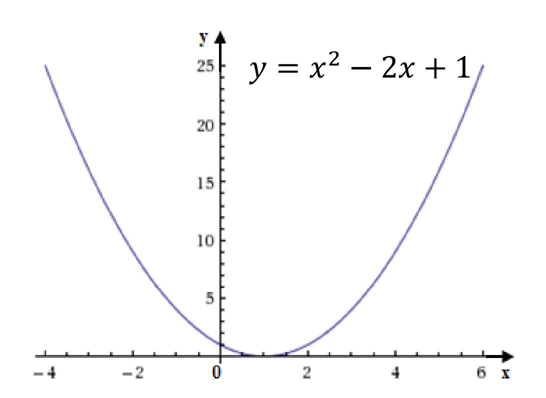
Recuerda

En la Unidad 1 hemos estudiado que al sumar una constante c a la variable independiente, se produce un desplazamiento horizontal en la gráfica de la función.

Ejemplo: La función:

$f(x) = (x-1)^2$, se obtiene desplazando $f(x) = x^2$ una unidad a la derecha. Además si resolvemos $f(x) = (x-1)^2$, obtenemos $f(x) = x^2 - 2x + 1$, donde es posible reconocer el caso de funciones cuadráticas que estamos estudiando como 3er caso.

Veamos su comportamiento gráfico: $y = x^2 - 2x + 1$



Observemos:

Del comportamiento gráfico es posible deducir:

- Las ramas están orientadas hacia arriba.
- El vértice se desplazó una unidad horizontalmente.
- El eje de la parábola ya no es el eje de ordenadas, sino que es una recta vertical paralela al eje de ordenadas que pasa por el vértice.

En general se puede aproximar su comportamiento gráfico buscando sus **puntos notables** como son sus intersecciones con los ejes:

Recuerda

En la Unidad 1 hemos estudiado cómo obtener los cortes o intersecciones con los ejes coordenados

INTERSECCIÓN –y:

En la Unidad 1 hemos visto que cualquiera sea la función, el corte con el eje y (de ordenadas) se obtiene cuando la variable independiente: $x = 0$.

Por ejemplo en el caso anterior: $y = x^2 - 2x + 1$.

Tenemos:

$f(0) = 0^2 - 2.0 + 1 \Rightarrow$ el punto de coordenadas: $\boxed{(0,1)}$ es la **intersección con el eje** y

INTERSECCIÓN –x:

Recordando lo estudiado en la Unidad 1:

Hacemos $y = 0$ en la función: $x^2 - 2x + 1 = 0$ y obtenemos lo que se denomina **Ecuación Cuadrática**.

Para resolver esta ecuación debemos recordar (visto en la Unidad 1) que la fórmula cuadrática, que sirve para identificar las raíces de esta ecuación, es:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Al utilizar la fórmula cuadrática, habrá **UNA** raíz real, **DOS** raíces reales o **NINGUNA** raíz real según el radicando llamado **DISCRIMINANTE**:

$\Delta = b^2 - 4ac$ sea **nulo**, **positivo** o **negativo** respectivamente.

Para este caso en particular, se deduce que la parábola corta al eje x en un solo punto de coordenadas $(1, 0)$, que coincide con el vértice de la parábola.

Para hallar algebraicamente el valor exacto del vértice, es posible obtener sus coordenadas a través de las siguientes fórmulas:

Abscisa del vértice : $\boxed{x_v = \frac{-b}{2a}}$. En nuestro caso: $x_v = \frac{2}{2.1} = 1$

Ordenada del vértice, es la imagen que le corresponde al valor x_v hallado. Tengan presente también que como el eje de simetría de la parábola pasa por la coordenada x del vértice, la misma puede expresarse de la siguiente forma: $y_V = f(-\frac{b}{2a})$. Es decir, se reemplaza la abscisa del vértice en la ecuación cuadrática, obteniendo así su valor de ordenada.

En este caso, $y_v = 0$

Como último caso se analizará la situación que se presenta cuando el coeficiente a es negativo

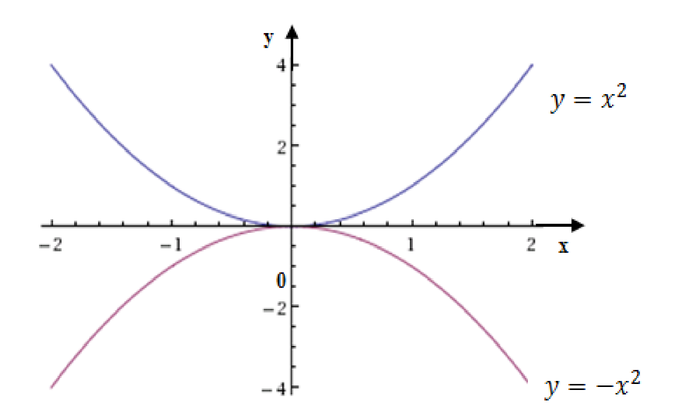
4to CASO:

$$a < 0$$

Cuando en la Unidad anterior, dentro del concepto de desplazamiento se evaluó la reflexión, pudo apreciarse que si a partir de una función $y = f(x)$, se obtiene: $y = -f(x)$ ocasiona, no un desplazamiento vertical u horizontal, sino una **Reflexión** sobre el eje x.

En el caso de las parábolas, si con el coeficiente $a > 0$ las ramas estaban orientadas hacia arriba, cuando $a < 0$ las ramas estarán abiertas hacia abajo.

Gráficamente:



Después de haber analizado los cuatro casos que te presentamos, estás en condiciones de resumir la información que cada coeficiente constante: a, b y c brindan acerca del comportamiento de la función cuadrática:

Resumiendo:

Coeficiente a: orientación de las ramas

- $a > 0$: ramas abiertas hacia arriba
- $a < 0$: ramas abiertas hacia abajo
- $a = 0$: nunca puede asumir este valor, ya que anularía el término cuadrático, obteniéndose una función polinómica de 1º grado (función lineal)

Coeficiente b: desplazamiento horizontal

$b = 0$: eje de la parábola coincide con el eje de ordenadas

$b \neq 0$: traslada horizontalmente a la parábola, por lo que su eje no coincide con el eje y, sino con una recta vertical de ecuación $x = -\frac{b}{2a}$

Coeficiente c: corte al eje de ordenadas o **INTERSECCIÓN –y**

$$\boxed{f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c}$$

Intersección – x

La parábola cortará al eje x en dos puntos, en uno (que coincide con el vértice) o en ninguno, según el resultado de aplicar la fórmula:

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

En general evaluando solo el signo del discriminante, es posible adelantar si la parábola cortará o no al eje x, y en su caso en cuántos puntos.

Se llama discriminante al radicando (expresión que aparece debajo del signo radical) : $b^2 - 4.a.c$. Se lo simboliza con la letra griega delta: Δ , y si resulta:

- $\Delta > 0$ se obtendrá dos valores al resolver $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Al analizar la fórmula, observa que al sumar y luego restar el resultado de la raíz al valor de $-b$, para luego dividirlo por $2a$, obtendrás dos valores reales distintos, que indicaran dos puntos de corte al eje x.

- $\Delta = 0$ se obtendrá un solo valor al resolver $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Al sumar o al restar 0 al valor de $-b$ se obtendrán dos valores reales iguales, indicando que gráficamente la parábola corta en un solo punto al eje x, que es donde coincidentemente se ubica su vértice.

- $\Delta < 0$ La raíz de índice par de un número negativo, no tiene solución dentro del conjunto de los números reales, por lo que nos estaría indicando que ningún valor real de x es solución de esta ecuación de 2º grado y gráficamente la parábola no tiene punto de corte con eje x.

Toda Ecuación Cuadrática tiene DOS RAÍCES REALES Y DISTINTAS, DOS RAÍCES REALES E IGUALES o NINGUNA RAÍZ Real.

- También con los valores de sus coeficientes, es posible determinar las coordenadas de su **VÉRTICE:** $(x_v , y_v) = \left(-\frac{b}{2a} , f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- El **VÉRTICE** es el valor **máximo** de la parábola si tiene las ramas orientadas hacia **abajo**, o valor **mínimo** si sus ramas están orientadas hacia **arriba.**

Veamos ahora a través de algunos ejemplos, algunas de las muchas aplicaciones que tienen las funciones cuadráticas en las ciencias económicas.

2.2.3. Aplicaciones Económicas de las Funciones Cuadráticas

Dado a que el vértice de la parábola es el punto más alto o el más bajo sobre la gráfica, es posible utilizar este concepto en la búsqueda de un valor máximo o un valor mínimo de una función cuadrática:

Ejemplo: El dueño de un comercio de artículos eléctricos sabe que su función de ingreso total está dado por la función: $I(p) = -50p^2 + 1500p$, desea determinar qué valor del precio: p produce el ingreso máximo, ¿cuál es el ingreso máximo total esperado?, ¿qué sucederá si $p > 30$?.

Al ser el ingreso: $I(p) = -50p^2 + 1500p$ una función cuadrática, podemos graficarla con los conocimientos aprendidos en el ítem anterior. Además sabemos que el precio no puede tomar valores negativos. De este modo su gráfica es:

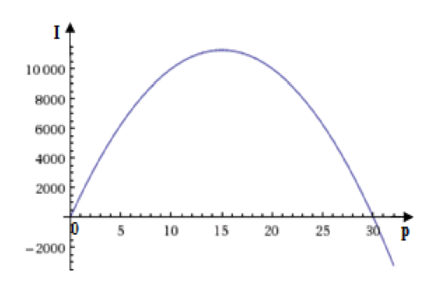


Figura 17

El ingreso total esperado al cobrar determinado precio se calculará sustituyendo el valor de p en la función de ingreso total, por ejemplo, el ingreso total correspondiente a un precio de $10 es:

$$I(10) = 1500(10) - 50(10)^2$$

$$I(10) = 15000 - 5000 = \$10000$$

Observando el comportamiento gráfico de la Figura 17, podemos determinar que el máximo ingreso se obtiene cuando $\boxed{p = 15}$, recuerden que el punto más alto en la función cuadrática se presenta en la coordenada x_v del vértice siendo por lo tanto este precio el que determina el ingreso máximo.

Si ahora queremos determinar cuál será el **monto del ingreso máximo** debemos reemplazar en la función **ingreso total** al precio: p por: $p = 15$
Así obtenemos que:

$$I(15) = 1500(15) - 50(15)^2$$

$$I(15) = 22500 - 11250 = \$11250$$

Para determinar que sucede con el **ingreso total** cuando $p > 30$ observando la gráfica podrán concluir que este comercio dejará de percibir ingresos.

En general, todas las funciones económicas que analizamos con un comportamiento lineal como las gráficas rectilíneas de ***oferta, demanda, costo, ingreso,*** *pueden presentar datos que se ajusten mejor al comportamiento de una función cuadrática.*

Ejemplo: Equilibrio entre oferta y demanda

Las encuestas de mercado realizadas a proveedores de un producto en particular llegaron a la conclusión de que la forma de la función de oferta y demanda son respectivamente las siguientes:

$$o(p) = 0.5\mathrm{p}^2 - 200 \quad \text{y} \quad \mathrm{d}(p) = \mathrm{p}^2 - 100\mathrm{p} + 2500$$

Para Reflexionar:

¿Cuál es el dominio restringido de la función oferta? ¿y de la función demanda? ¿Qué significado tendrán las intersecciones con los ejes de la función oferta? y de la función demanda?

Volviendo al ejemplo, el equilibrio de mercado entre la **Oferta** y la **Demanda** puede estimarse para las funciones de oferta y demanda de la siguiente manera:

$$0.5\mathrm{p}^2 - 200 = \mathrm{p}^2 - 100\mathrm{p} + 2500$$

Agrupamos las incógnitas y números en un miembro y obtenemos la **Ecuación** Cuadrática:

$$0.5\mathrm{p}^2 - 200 - \mathrm{p}^2 + 100\mathrm{p} - 2500 = 0$$

$$-0.5\mathrm{p}^2 + 100\mathrm{p} - 2700 = 0$$

Aplicamos la fórmula resolvente:

$$p = \frac{-(-100) \pm \sqrt{(-100)^2 - 4(-0.5)(2\,700)}}{2(-0.5)}$$

Y obtenemos:

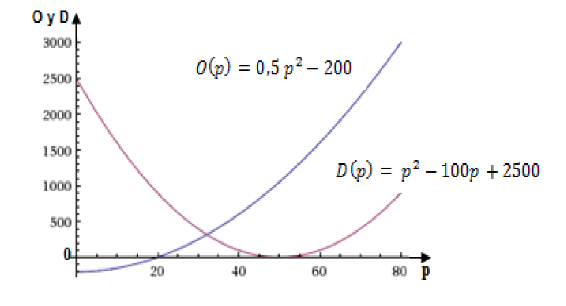
$$p = \frac{100 \pm \sqrt{4\,600}}{1} = 100\ \pm 67.82$$

Los valores de p que satisfacen la ecuación son $p = \$32.18$ y $p\ = \$167.82$. La segunda raíz se encuentra fuera del dominio relevante de la función de demanda y, por lo tanto, carece de significado.

Al sustituir $p = \ \$32.18$ en las funciones de oferta y demanda se producen los valores de $o(p)$ y $d(p) = 317.770$ unidades.

Así pues, se alcanza el **Equilibrio** del **Mercado** cuando el precio de mercado es igual a $38.18 y la cantidad demandada y ofrecida son 317,770 unidades.

Gráficamente:



Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 12:

Dadas las siguientes funciones cuadráticas:

i) $f(x) = x^2 - 4$ ii) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

a) Aproxima sus comportamientos gráficos identificando puntos notables y signos de sus coeficientes constantes (parámetros).

b) Identifica intervalos del dominio de f para los cuales $f(x)$ es mayor, menor o igual a cero.

c) Identifica intervalos del dominio de f para los cuales $f(x)$ crece ó decrece.

Actividad 13:

Dada la función cuadrática:

$$f(x) = (x+1)^2 + 2$$

a) Analiza los desplazamientos horizontales ó verticales que afectan a $f(x) = x^2$

b) Determina la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice.

Actividad 14:

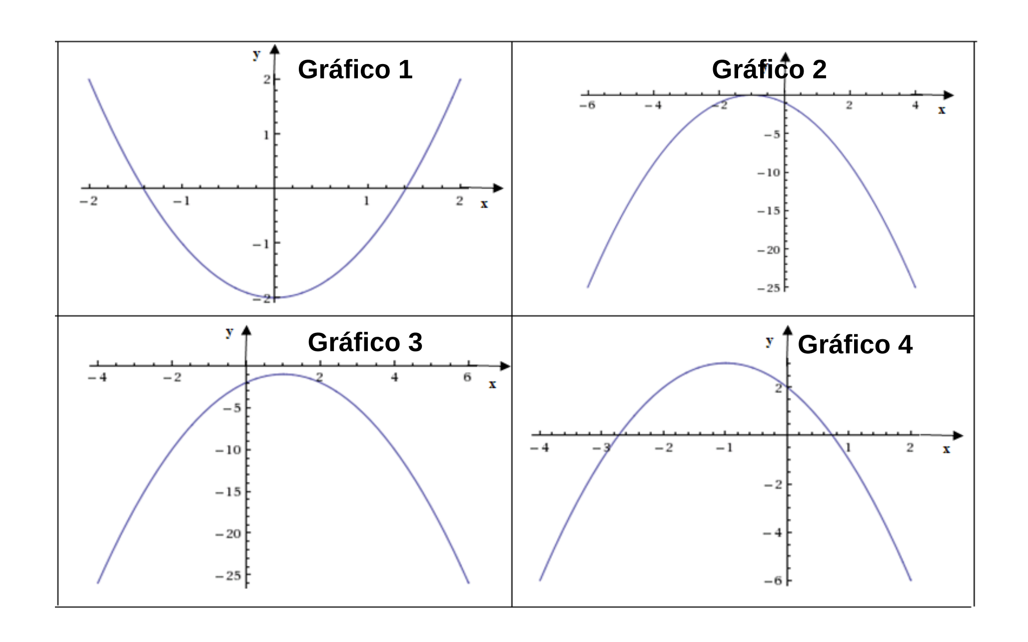
Observa los siguientes comportamientos gráficos y analiza:

a) Signos de sus coeficientes constantes y del discriminante.

b) Puntos notables.

c) Intervalos del dominio de f para los cuales $f(x)$ es mayor, menor o igual a cero.

d) Intervalos del dominio de f para los cuales $f(x)$ crece ó decrece.



Actividad 15:

Un analista encontró que las ganancias de su empresa, en cientos de miles de dólares, están dadas por $R(x) = -3x^2 + 35x - 50$, donde x es la cantidad, en cientos de dólares, gastada en publicidad. ¿Para qué valores de $\boldsymbol{x}$ tiene ganancias la empresa?

Actividad 16:

Si la expresión analítica que representa la relación entre oferta de neumáticos y precio, en pesos, está dada por la ecuación: $\boxed{p = q^2 + 10q + 25}$

Mientras que la demanda del mismo artículo se presenta por: $\boxed{p = -6q + 130}$

Encuentra el precio al cual la cantidad ofertada iguala a la cantidad demandada.

Actividad 17:

Encuentra la ecuación que representa los costos de un comerciante, conociendo que:

a) Es una función cuadrática par trasladada verticalmente 10 unidades hacia arriba.
b) El equilibrio con la función ingresos se alcanza en el punto $(20\,;\ \$1210)$.

2.3 Funciones Exponenciales

Las **Funciones Exponenciales** juegan un papel importante tanto en Administración, como en Economía y otras áreas. Se usan para estudiar el crecimiento de dinero, curvas de aprendizaje, crecimiento de población, etc.

Implica una constante elevada a un exponente variable, tal como $f(x)=2^x$.

2.3.1. Definición

A la función f, definida por $\boxed{f(x) = b^x}$ en donde $b>0$, $b\neq 1$, y el exponente x es cualquier número real, se la denomina función exponencial con base b .

Nota:

Se excluye $b = 1$, ya que $f(x)=1^x=1$ no responde a los comportamientos básicos que caracterizan a las funciones exponenciales.

Veremos seguidamente dos ejemplos, que permitirán comenzar con el análisis de este tipo de funciones:

Ejemplo: INTERÉS COMPUESTO

Un capital C que se deposita en un banco al 10 % anual, se convierte al cabo de un año en: $C + C.10\% = C + C.\frac{10}{100} = C\left(1 + \frac{1}{100}\right) = C.1{,}1$

Al cabo de t años será: $C.(1{,}1)^t$

La **Función** que describe cómo **Evoluciona** el valor de cada peso inicial al cabo de x años es: $\boxed{y = (1{,}1)^x}$

DEVALUACIÓN:

A la **Pérdida** del **Poder Adquisitivo** del dinero se le llama devaluación.

Es decir, si con el mismo dinero que un año atrás se adquirían 100 artículos, hoy sólo pueden adquirirse 90, se dice que el dinero se ha devaluado en un 10%, es decir que vale 90/100 = 0,9 de lo que valía.

Si cada año la **Devaluación** es del 10%, la **Evolución** del **Poder Adquisitivo** del dinero al cabo de x años, estaría dado por la función:

$$\boxed{y = (0{,}9)^x}$$

También son ejemplos de funciones exponenciales:

$y = (1{,}05)^x$: describe el **Incremento** de un capital colocado al 5% anual.

$y = (0{,}8)^x$: describe una **Devaluación** del 20 % anual.

Las gráficas correspondientes a estos ejemplos, se ubican en el primer cuadrante, ya que sus variables no asumen valores negativos:

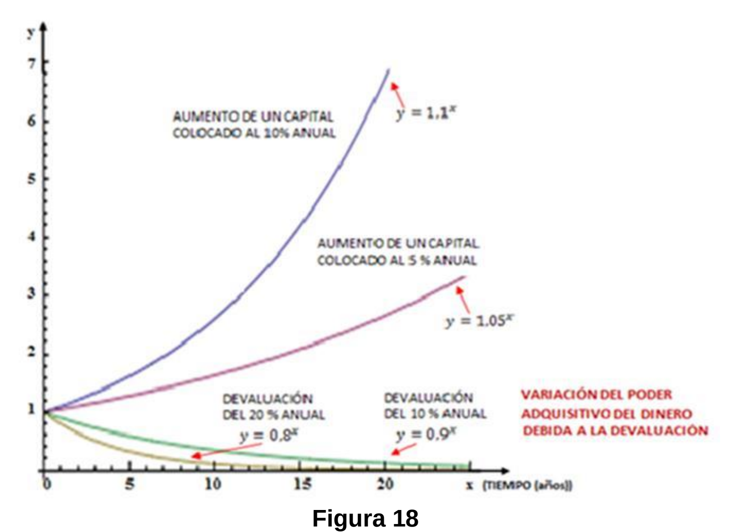


Figura 18
Fuente: Guzmán Miguel de “Matemáticas" Bachillerato 2 Edit. Anaya.

Observación:

Algunas funciones que parecen no tener la forma exponencial $y = b^x$, pueden ponerse en esa forma aplicando las reglas de los exponentes.

Recuerda

Lo visto en el ingreso:

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\qquad (a^m)^n = a^{m.n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\qquad a^0 = 1$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad (ab)^n = a^n b^n$

$a^1 = a$ $\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplos de Funciones Exponenciales

$$y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2^x}\right) \qquad y = 3^{2x} = \left(3^2\right)^x = 9^x$$

Seguidamente, analizaremos el comportamiento de la función exponencial según sea su base mayor a 1 o entre cero y uno.

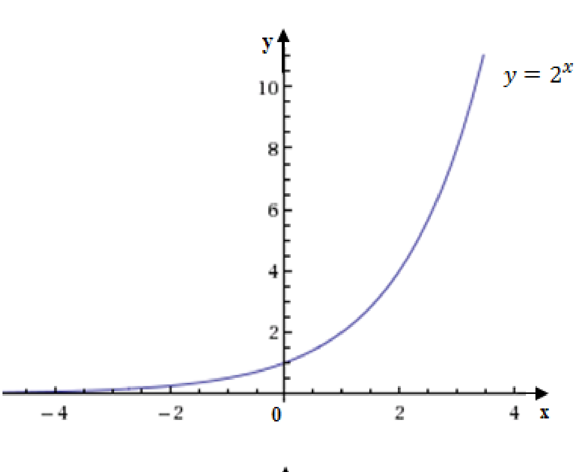
2.3.2. Comportamiento gráfico de la Función Exponencial

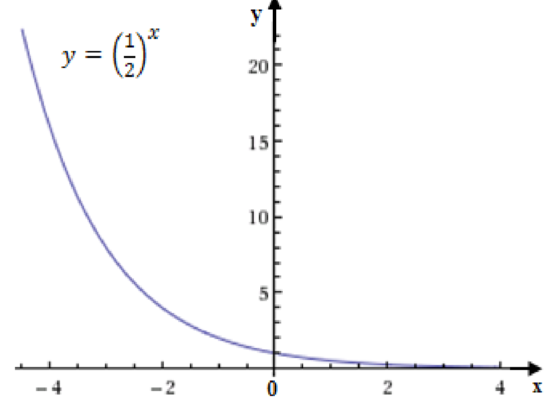
Tomemos las Funciones Exponenciales:

$$\boxed{y = 2^x} \quad \text{y} \quad \boxed{y = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$$

Confeccionemos la tabla de valores para x e y, marcamos los puntos y los unimos a través de una curva suave, de la siguiente forma:

x	$y = 2^x$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$
4	16	$\frac{1}{16}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	2
-2	$\frac{1}{4}$	4
-3	$\frac{1}{8}$	8
-4	$\frac{1}{16}$	16





De los gráficos, puedes inferir los siguientes comportamientos comunes a ambas gráficas:

- El dominio de una función exponencial, son todos los números reales.

  En símbolos: $\boxed{Dom\ f = IR}$

- La imagen o contradominio, son todos los números reales positivos.

  En símbolos: $\boxed{Im\ f = IR^{+} = (0, +\infty)}$

- Puesto que para todo $b \neq 0$, $b^0 = 1$, cada gráfica intercepta al eje y en $(0,1)$.
- Puesto que para cualquier valor real de x , $b^x \neq 0$ siempre, concluimos que las funciones exponenciales no tienen intersección con el eje x

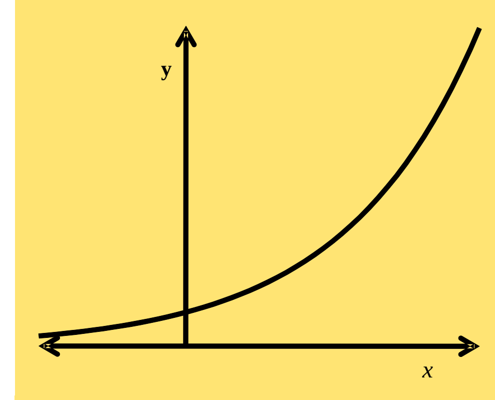
Veamos las características que diferencian a la **Función Exponencial**:

$$f(x) = b^x$$

1 er CASO:

$$\text{Si} \;\; b > 1$$

- La gráfica asciende de izquierda a derecha, es decir que al aumentar x también se incrementa y, que se eleva en forma muy empinada hacia la derecha.



- Presenta un **crecimiento exponencial**, que es más explosivo que el crecimiento polinomial, Su crecimiento es creciente, Cada vez crece más rápido.
- Cuanto mayor es la base b , más empinada es la gráfica.

- Cuando x tiende a tomar valores muy pequeños, la función tiende a anularse (a tomar el valor cero).

Dijimos **Tiende** , es decir que se acerca a cero, sin llegar a asumir dicho valor. Esta tendencia de la función se la expresa por medio de simbolos que utilizaremos frecuentemente más adelante:

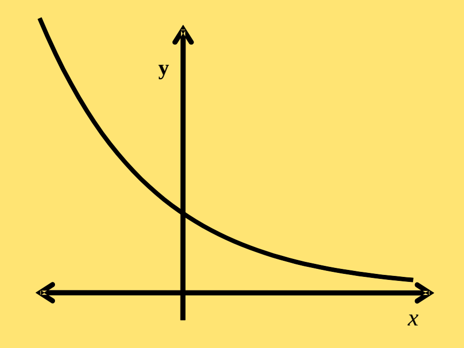
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

En este caso el eje x es la **Asíntota Horizontal** , que es el nombre con que se designa a la recta horizontal a la que una función se aproxima cuando x toma valores muy grandes o muy pequeños. La **Ecuación** de la Asíntota Horizontal es: $y = 0$.

2^{do} CASO:

$$\text{Si} \quad 0 < b < 1$$

- La gráfica desciende de izquierda a derecha, es decir que al aumentar x se disminuye y



- Presenta un de**crecimiento exponencial**.
- Cuanto menor es la base *b* , más empinada es la gráfica.

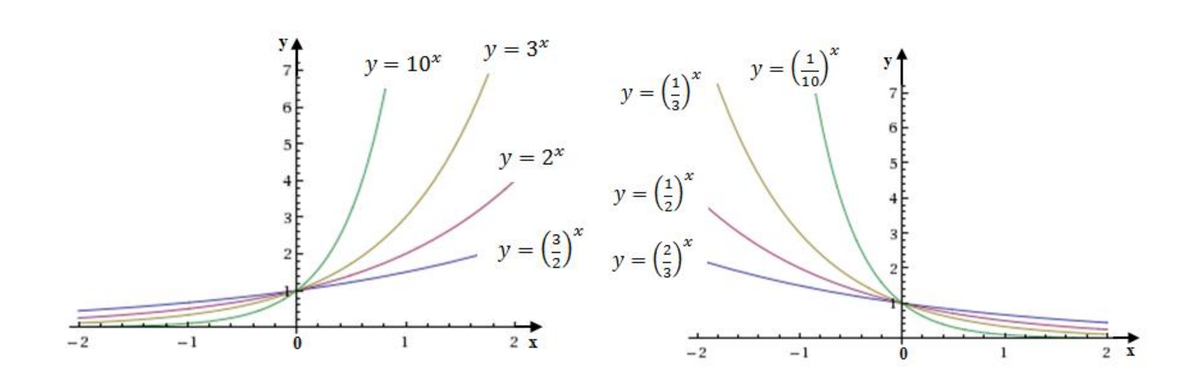
- Cuando x tiende a tomar valores muy grandes, la función tiende a anularse (a tomar el valor cero).

Dijimos **Tiende** , es decir que se acerca a cero, sin llegar a asumir dicho valor. Esta tendencia de la función se la expresa por medio de simbolos que utilizaremos frecuentemente más adelante:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = 0}$$

En este caso el eje x es la **Asíntota Horizontal** , que es el nombre con que se designa a la recta horizontal a la que una función se aproxima cuando x toma valores muy grandes. La **Ecuación** de la Asíntota Horizontal es: $\boxed{y = 0}$

A continuación se muestran las formas básicas de las funciones exponenciales según el valor que asume la constante b:



Observación:

Estas formas básicas se mantienen siempre y cuando no existan desplazamientos de la función.

- **Desplazamiento Vertical**:

  Si consideras la función $f(x)=b^x+c$, podrás apreciar que se desplazó verticalmente c unidades.

- **Desplazamiento Horizontal**

  Si analizas $f(x)=b^{x-c}$ observarás que según lo estudiado en la Unidad 1 existe un desplazamiento horizontal.

- **Tendencia de la Función Exponencial**

  El valor de b nos indica si la función exponencial es creciente o decreciente.

  Creciente: Si $b > 1$

  Decreciente: Si $0 < b < 1$

Pero para conocer más en detalle su comportamiento, evaluamos sus puntos notables o confeccionamos una tabla de valores.

2.3.3. Aplicaciones Económicas

Cuando introducimos la Función Exponencial lo hicimos con una de las aplicaciones como lo es devaluación del valor adquisitivo, aunque su aplicación es múltiple.

Una de las funciones exponenciales más útil en Ciencias Económicas es la llamada Función Exponencial Natural, que se define como:

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

Una de las aplicaciones de esta función la estudiarás dentro de dos años en Cálculo Financiero, ya que esta función genera la fórmula reconocida del interés.

Nota:

El número $\boxed{e}$ es el número irracional aproximadamente igual a 2,7182828... denotado por la letra e, en honor del matemático Suizo Leonhard Euler, quien lo utilizó por primera vez en 1731 al representar la base de los logaritmos naturales, en una carta que envió a otro matemático, Christian Goldebach.

Función Exponencial Natural:

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

Anotemos algunas de sus características para poder graficarla:

Dominio: $Dom\, f = IR = (-\infty, +\infty)$

Imagen: $Im\, f = IR^+ = (0, +\infty)$

Esta función exponencial es **Creciente** ya que su base $b = e = 2{,}71828 > 1$

Corta o intercepta al eje $\boxed{y}$ en el punto $(0,1)$.

Tiene por **Asíntota Horizontal** a la recta cuya ecuación es $\boxed{y = 0}$

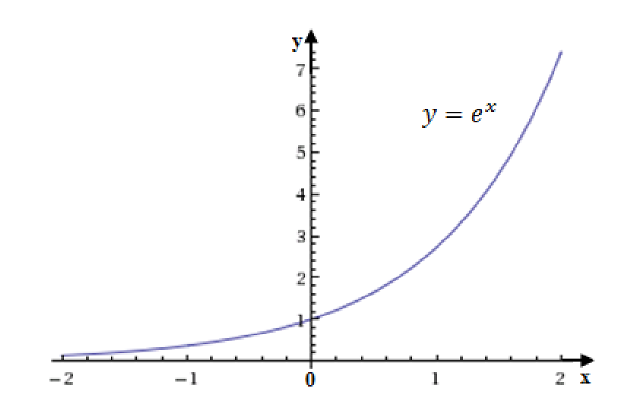
(ecuación del eje y)

Intervalo de **Positividad**: Siempre es positiva.

En símbolos:

$$f(x) = e^x > 0 \;\; \forall x \in IR$$

Gráficamente:



¿QUÉ APRENDIMOS?: RESOLVER-REPASAR

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 18:

Dadas la función: $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ identifica:

a) Puntos Notables
b) Dominio e Imagen
c) Intervalos de crecimiento ó decrecimiento
d) Ecuación de la asíntota horizontal

Actividad 19:

Dadas la función: $f(x) = 2^x + 2$ identifica:

a) Puntos Notables

b) Dominio e Imagen
c) Intervalos de crecimiento ó decrecimiento
d) Ecuación de la asíntota horizontal

Actividad 20:

Sabiendo que la devaluación anual es del 5% identifica una fórmula para la evolución del valor adquisitivo al cabo de x años.

i) Aproxima su comportamiento gráfico.
j) ¿Cuál es la evolución del valor adquisitivo del dinero al cabo de 10 años?

Actividad 21:

Halla la expresión analítica que represente el monto que se obtiene de colocar un capital (C) a una tasa de interés compuesto del 13% anual.

2.4 Funciones Logarítmicas

Hay funciones que surgen como inversas de otras conocidas, como por ejemplo la raíz cuadrada como la inversa de la potencial x, la función logarítmica de base b como la inversa de la correspondiente exponencial de base b, etc.

2.4.1. Definición

La función logarítmica de base b , en donde $b>0$ y $b\neq 1$, se denota mediante log y se define como:

$$y = log_b(x) \text{ sí y sólo sí } b^y = x$$

Nota:

- Calcular el logaritmo de un número es hallar el exponente al que hay que elevar la base del logaritmo para obtener dicho número:

EJemplos de Cálculo de Logaritmos

$$y = log_2 8 = 3, \quad porque \quad 2^3 = 8$$

$$y = log_5 25 = 2, \quad porque \quad 5^2 = 25$$

$$y = log_{10} 1 = 0, \quad porque \quad 10^0 = 1$$

- No existen los logaritmos de cero ni de números negativos, por lo tanto el argumento de la Función Logaritmo siempre es mayor que cero:

En símbolos:

$$f(x) = log_b(x) \text{ existe } \forall x > 0 \ .$$

- A los logaritmos de base 10 se los denomina logaritmos decimales (también se los conoce como logaritmos comunes) y por lo general no se le coloca el subíndice en la notación. En símbolos:

$logx$ significa $log_{10}x$.

- A los logaritmos de base e , se les denomina logaritmos naturales o neperianos y para simbolizarlos se utiliza la notación.

$y = lnx$ que significa $y = log_e x$.

Para operar con logaritmos, es de suma utilidad **Recordar** algunas de sus **Propiedades**:

- El logaritmo de un producto es una suma de logaritmos:

$$\boxed{log_b(m.n) = log_b(m) + log_b(n)}$$

- El logaritmo de un cociente es una diferencia de logaritmos:

$$\boxed{log_b\left(\frac{m}{n}\right) = log_b(m) - log_b(n)}$$

- El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base:

$$\boxed{log_b(m)^r = r.log_b(m)}$$

2.4.2. Comportamiento Gráfico

Para aproximar los comportamientos básicos que caracterizan a las funciones logarítmicas, graficaremos una curva suave a través de los puntos que surgen de las tablas de valores. Una forma más sencilla de obtener los pares ordenados es usar los mismos pares ordenadas de su inversa exponencial correspondiente, cambiados de orden.

Corrobora esta apreciación confeccionando las tablas de valores correspondientes a las funciones:

$$y = 2^x \qquad y = log_2\, x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad y = log_{\frac{1}{2}}\, x$$

De los gráficos es posible deducir dos formas básicas que caracterizan a las funciones logarítmicas, según su base b sea $b > 1$ ó $0 < b < 1$.

Características Comunes:

- El dominio de las funciones logarítmicas son los números reales positivos (no existe el logaritmo de cero ni de los números negativos)

  En símbolos:

$$\boxed{Dom\ f = IR^+ = (0, +\infty)}$$

- La imagen o contradominio son todos los números reales.

  En símbolos:

$$\boxed{Im\ f = IR = (-\infty, +\infty)}$$

- Dado a que el punto $(1, 0)$ siempre pertenece a la función logarítmica, la función siempre **Intercepta** al **Eje** x en dicho punto.

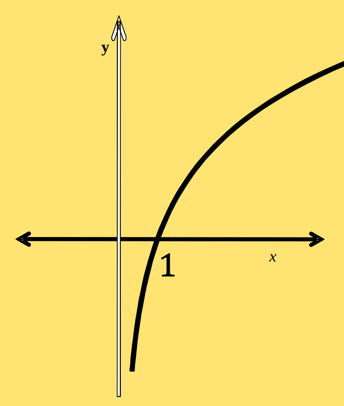
- No presenta **Intersección-y**

Características Diferenciales:

1er CASO:

Si $b > 1$

- La gráfica asciende de izquierda a derecha, es decir que al aumentar x también se incrementa y, pero a medida que x aumenta el crecimiento es más lento.



- Cuanto mayor es la base, más lento es el crecimiento de la función.

- Cuando x tiende a anularse (tiende a tomar el valor cero), la función tiende a tomar valores negativos muy grandes.
  En símbolos:

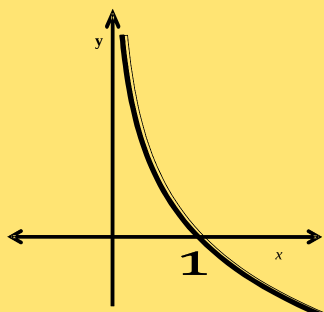
$$\lim_{x \to 0} log_b(x) = -\infty$$

En este caso el eje y es la **Asíntota Vertical**, que es el nombre con que se designa a la recta vertical a la que una función se aproxima cuando x toma valores cercanos a cero.

2^{do} CASO:

$$\text{Si } \ 0 < b < 1$$

- La gráfica desciende de izquierda a derecha, es decir que al aumentar x disminuye y. el decrecimiento es más lento, la curva se hace menos empinada



- Cuando x tiende a anularse (tiende a tomar el valor cero), la función tiende a tomar valores positivos muy grandes.

  En símbolos:

$$\lim_{x \to 0} log_b(x) = +\infty$$

En este caso el eje y es la **Asíntota Vertical** . El gráfico de la función, cuando x tiende a cero, se hace asintótica al eje y

Nota:

- Los logaritmos más ampliamente usados son los que tienen por base el número e. $y = log_e\, x = \ln x$

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 22:

Dada la función: $f(x) = \log x$:

a) Determina cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a dicha función logarítmica:

  i. $(100,2)$
  ii. $(1,0)$
  iii. $(2,100)$
  iv. $(-1,0)$

b) Aproxima el comportamiento gráfico identificando los pares ordenados seleccionados.

c) Identifica valores de x para los cuales $\log x$ sea mayor, menor o igual a cero

Actividad 23:

Dada la función: $f(x) = \log(x) + 2.$, identifica

a) Puntos Notables
b) Dominio e Imagen
c) Intervalos de crecimiento ó decrecimiento
d) Intervalos de positividad y negatividad
e) Ecuación de la asíntota vertical

Actividad 24:

Dada la función: $f(x) = \log(x + 2)$, identifica

a) Dominio e Imagen
b) Intervalos de crecimiento ó decrecimiento
c) Intervalos de positividad y negatividad
d) Ecuación de la asíntota vertical

2.5 Funciones Trigonométricas

El último tipo de funciones que estudiarás en este módulo, son las llamadas **Funciones Trigonométricas**.

Es probable que hayas estudiado **TRIGONOMETRÍA** en el nivel secundario, pero antes de abocarnos específicamente al análisis de sus comportamientos, te ayudaremos a recordar los conceptos básicos.

La trigonometría se ocupa principalmente de estudiar las relaciones que se establecen entre los **lados y los ángulos de un triángulo**.

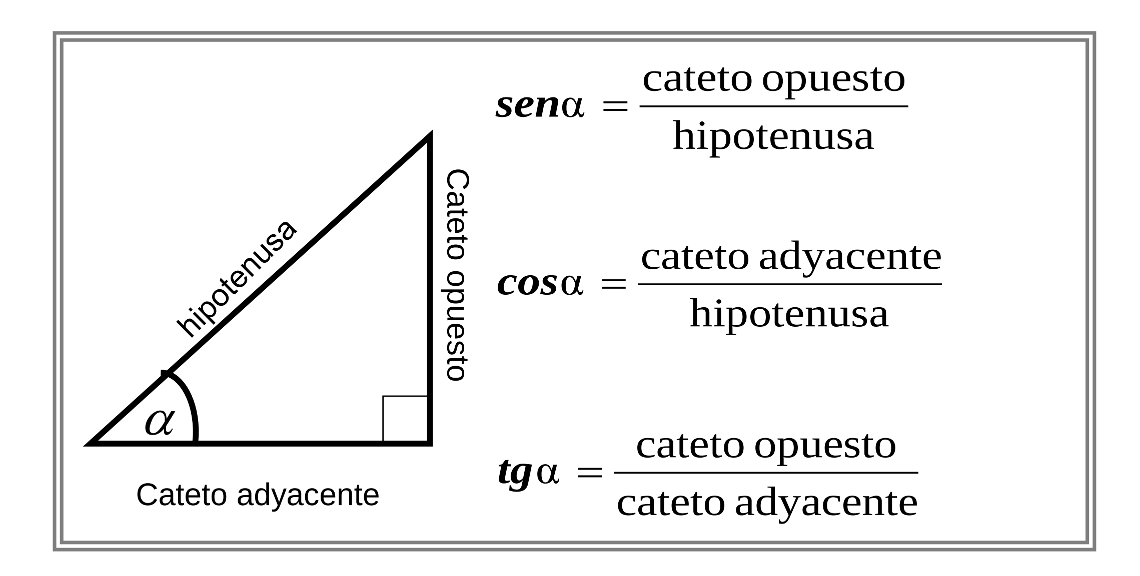
Las razones trigonométricas más usadas, relacionan los lados de un triángulo rectángulo (triángulo en el que uno de sus ángulos es recto) con uno de sus ángulos agudos.

En un principio estas razones trigonométricas surgieron para caracterizar ángulos, ya que resultaba más fácil medir distancias, que medir ángulos. Actualmente son útiles como instrumento para el análisis de movimientos periódicos.

Un movimiento es periódico cuando su comportamiento se repite sucesivamente a lo largo de un período.

El mundo rebosa de ritmos y de fenómenos periódicos: el día y la noche, las olas del mar, los latidos del corazón, las ondas cerebrales, los rayos x , etc.

En este caso estudiarás las funciones trigonométricas, **Seno**, **Coseno** y **Tangente** de un **ángulo**, cuyas relaciones establecidas entre los lados de un triángulo rectángulo se muestran en el siguiente cuadro:



2.5.1. Definición de Seno – Coseno y Tangente

El gran interés de estas funciones trigonométricas radica en la posibilidad de expresar cualquier función periódica como una combinación lineal de las funciones $sen\, x$ y $cos x$.

Recuerdas ¿cómo se miden los ángulos?

Por lo general en grados o en radianes

El ángulo correspondiente a una vuelta de circunferencia, mide 360º ó 2π.

360º proviene de la división de una circunferencia en 360 partes iguales.

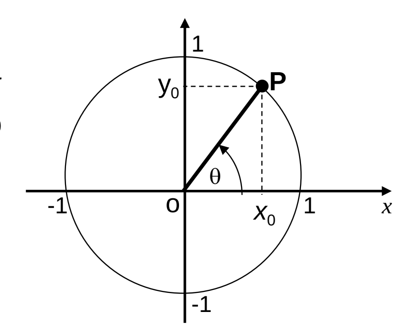
Esta división arbitraria proviene de los babilónicos a quienes les gustaban los múltiplos de 60.

$\boxed{2\pi}$ *radianes*: mide la longitud del arco que corresponde al ángulo. Si el radio de la circunferencia es 1, la longitud de toda la vuelta de la circunferencia es simplemente 2π: es un número real ya que es el resultado de multiplicar 2 por el irracional π (3, 1416...)

Por lo tanto $\boxed{360° = 2\pi}$, pudiendo obtenerse una equivalencia entre ambas mediciones:

360º = 2π	180º = π
270º = 3/2 π	90º = π/2

Las funciones **Seno**, **Coseno** y **Tangente** que se definieron en **triángulos rectángulos**, pueden también definirse en un círculo que se denomina unitario pues su radio es 1. Llamado **Circunferencia Trigonométrica.**



El vértice del ángulo coincide con el origen y su lado inicial coincide con el eje x positivo.

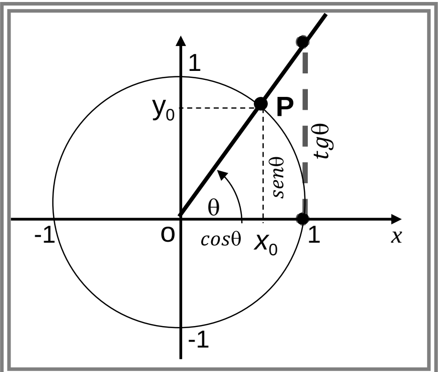
Como en el triángulo inscripto dentro de la circunferencia, la hipotenusa coincide con el radio de la circunferencia que vale 1, las **Razones Trigonométricas** se reducen a:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{y_0}{1} = y_0$$

Geométricamente es la ordenada del punto en que el lado libre del ángulo corta a la circunferencia.

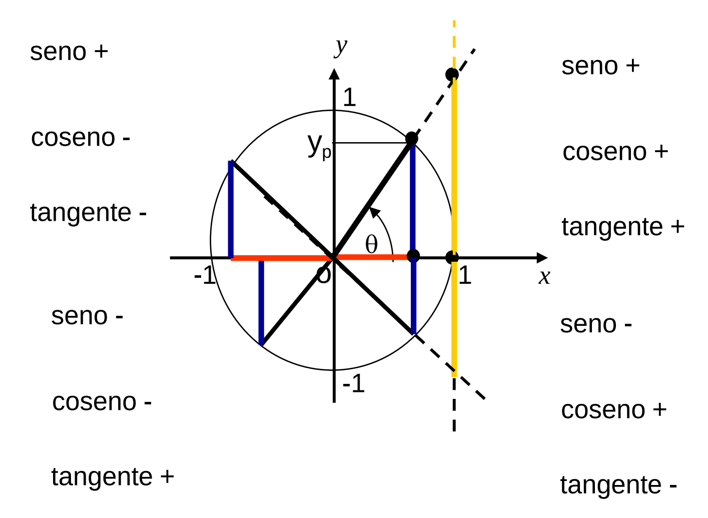
$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{x_0}{1} = x_0$$

Geométricamente es la abscisa del punto en que el lado libre del ángulo corta a la circunferencia.



$$tg\,\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Geométricamente la tangente es la ordenada el punto en el que la prolongación del lado libre del ángulo corta a la recta vertical tangente a la circunferencia en el punto (1,0).



En la figura anterior se muestran los signos que les corresponden a las funciones trigonométricas según el ángulo esté ubicado en el primero, segundo, tercer o cuarto cuadrante.

Los ángulos que se generan en dirección opuesta al giro de las agujas del reloj tienen medida positiva, los que se generan en el mismo sentido al giro de las agujas del reloj, tienen medidas negativas.

Los ángulos pueden girar más de una vuelta de circunferencia, determinando ángulos congruentes.

2.5.2. Comportamiento Gráfico

Las funciones trigonométricas que analizaremos son las funciones

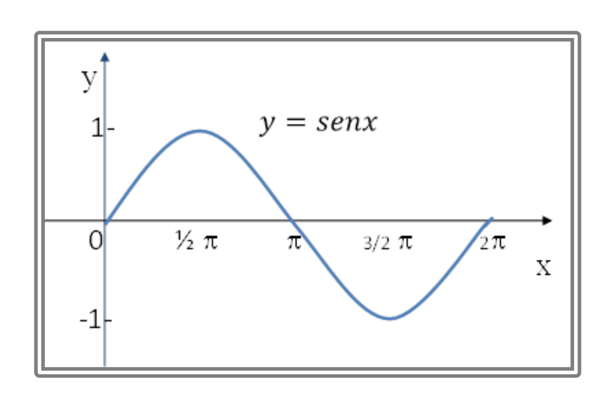
$$\boxed{y = \operatorname{sen} x} \quad \boxed{y = \cos x} \quad \boxed{y = \operatorname{tg} x}$$

Para apreciar sus comportamientos se puede seguir el procedimiento usual de confeccionar una tabla de valores, graficando los puntos correspondientes y luego uniéndolos con una curva suave.

La variable x asume valores de ángulos que pueden estar expresados en **Grados** o en **Radianes** (valores reales).

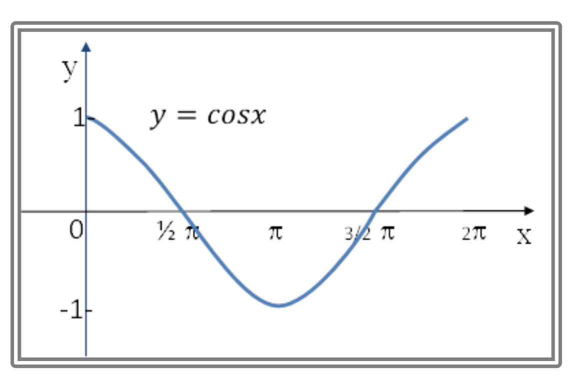
El comportamiento gráfico de las funciones trigonométricas, las analizaremos siempre en el intervalo $[0,2\pi]$:

$\boxed{y = \text{sen } x}$ $\boxed{y = \cos x}$ $\boxed{y = \text{tg}x}$ es:



Tanto el seno como el coseno son funciones **continuas** para todo número real, **acotadas** entre –1 y 1 (para ningún valor de x valen más de 1 ni menos de –1) y periódicas de período 2 π

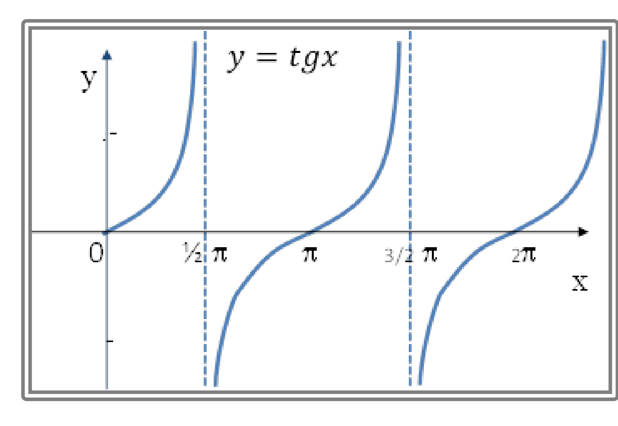
Sus dominios son el conjunto de números reales: y sus imágenes se reducen al intervalo [-1, 1]



En símbolos:

$Dom\ senx = IR \quad Im\ sen\ x = [-1,1]$

$Dom \cos x = IR \quad Im\ cos\ x = [-1,1]$



La función tangente no está definida en $x = \frac{\pi}{2}$ (90º) ni en $\frac{3}{2}\pi$ (270º)

Por lo tanto no es continua en esos puntos ni tampoco es acotada, pues cuando el ángulo se acerca a $\frac{\pi}{2}$ el valor de la tangente se hace cada vez más grande (→ ∞). Lo mismo ocurre cuando x → $\frac{3}{2}\pi$

Su dominio será el conjunto de los números reales, excluyendo los valores de x para los que la tangente no está definida como en $x = \pi/2,\ x = 3/2\pi$ Y su imagen será el conjunto de los números reales, ya que el intervalo de valores que puede asumir la función $f(x) = \ tg\ x$ es (-∞, ∞).

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 25:

Dadas las funciones: $f(x) = \operatorname{sen}(x) + 2$ y $f(x) = \cos(x) - 1$. Realiza su gráfica teniendo en cuenta los conceptos de desplazamientos e identifica:

a) Dominio e Imagen.
b) Intervalos de crecimiento ó decrecimiento.
c) Intervalos del dominio para los cuales la función resulta positiva, negativa o nula.

Actividad 26:

Dada la función: $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Realiza su gráfica teniendo en cuenta los conceptos de desplazamientos e identifica:

a) Dominio e Imagen
b) Intervalos de crecimiento ó decrecimiento
c) Intervalos del dominio para los cuales la función resulta positiva, negativa o nula

Te proponemos una actividad integradora de los conceptos trabajados en esta Unidad.

Actividad Integradora:

Determina los dominios de las siguientes funciones, teniendo en cuenta que en el caso de que se trate de funciones compuestas donde intervengan funciones trigonométricas se debe acotar el análisis al intervalo $[0\ ;\ 2\pi]$

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+5x-6}}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}$

c) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

d) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$

e) $f(x) = 2^{x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{\cos\ x + 1}$

g) $f(x) = \sqrt{\cos\ x}$

h) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{X} + 3$

UNIDAD III:

LÍMITE Y CONTINUIDAD

Índice

Unidad III: Límite y Continuidad de Funciones

Unidad III

En esta unidad desarrollaremos los conceptos de **Límite** y **Continuidad**.

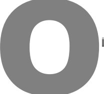
Los mismos, guardan una estrecha relación con los conceptos de variaciones, cambios o movimientos considerados en el análisis matemático. La noción de Límite y Continuidad constituyen el paso previo al Calculo Diferencial y sus aplicaciones.

La unidad se ubica dentro del bloque temático **Límite y Continuidad**

Comenzaremos analizando el concepto de **Límite** de **Funciones** a partir de representaciones algebraicas y gráficas y luego desarrollaremos aplicaciones a problemas de las **Ciencias Económicas**.

Luego nos centraremos en el estudio analítico y gráfico de **Continuidad** de **Funciones** y sus **Aplicaciones Económicas**.

El estudio de Límite y Continuidad, será aplicado sobre las funciones que estudiamos en las **Unidades I y II.**



Objetivos

General:

Identificar tendencias de las funciones a través de los conceptos de Límite y Continuidad y sus aplicaciones a las Ciencias Económicas.

Específicos:

- ✓ **Interpretar la noción intuitiva del límite de funciones.**
- ✓ **Determinar la existencia del límite de la función a partir de su expresión algebraica.**
- ✓ **Determinar la existencia del límite de la función a partir de su gráfico.**
- ✓ **Analizar la continuidad de las funciones.**

3.1. Límite de una Función.

La palabra límite a menudo la asociamos con una línea, puntos o momento que señala el final de un objeto material o no, a menudo en el lenguaje diario expresiones como: Estoy acercándome al límite de mi paciencia, en tal sentido el concepto de **Límite** implica la idea de **Aproximarse** a un punto o a un valor tan cerca cómo se especifique, y sin alcanzarlo nunca. Por ejemplo, la producción máxima de una máquina industrial o de una fábrica, es un límite que en la práctica es poco alcanzable, pero al cual es posible aproximarse arbitrariamente.

En un lenguaje sencillo podríamos decir que el concepto de límite tiene que ver con la noción de "acercarse cada vez más a algo", pero sin tocarlo.

El concepto de **Límite** en matemática tiene el sentido del **lugar** hacia el que se **dirige** una **función**.

En la **Unidad II** esta noción de Límite, la estudiamos cuando evaluamos los comportamientos que asumían las funciones exponenciales y logarítmicas cuando la variable independiente **tendía** a infinito o cuando se **acercaba** a cero. Es decir, establecimos que:

$\lim_{x \to +\infty} b^x = 0$ para $0 < b < 1$ En el caso de la **Exponencial**

Y

$\lim_{x \to 0} \log_b x = -\infty$ para $b > 1$ En el caso de la **Logarítmica**

De esta manera identificábamos las **Tendencias** que presentan las funciones e intuitivamente nos introducíamos al **Concepto de Límite** que a partir de esta unidad desarrollaremos más exhaustivamente.

Concepto de Límite en palabras:

Consiste en **acercarse** lo máximo posible (tanto por **derecha** como por **izquierda**) a un valor específico de la **variable independiente** y examinar el efecto que esto produce sobre los **valores de la función**.

En otras palabras:

El **Límite** de una **Función** es el **valor** al que **tiende** la función a medida que la variable **independiente** se **aproxima** a un valor determinado.

En símbolos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Comenzaremos analizando el límite a través de un ejemplo y luego formalizaremos la definición de límite.

Ejemplo 1: Sea la función: $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ cuyo dominio es: $Dom\, f = IR - \{1\}$.

Si bien sabemos que la función **no** está definida en $x = 1$, pues se anula el denominador, queremos conocer el comportamiento de la función cuando x se aproxima a 1

Para ello podemos optar por:

a) Confeccionar una tabla asignando valores a x cercanos a 1, algunos por la izquierda y otros por la derecha:

Tabla 1

x tiende a 1 por izquierda: $x \to 1^-$ → 1 ← **$x \to 1^+$: x tiende a 1 por derecha**

x	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999	1	1.001	1.005	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	2.44	2.71	2.852	2.970	2.997...	?	3.003...	3.015	3.03	3.31	3.64

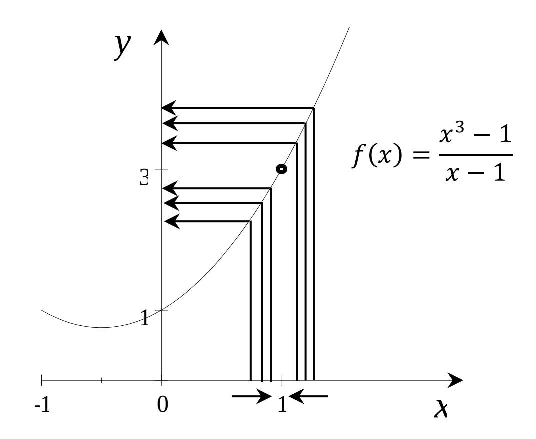
$f(x)$ tiende a 3 → 3 ← **$f(x)$ tiende a 3**

Concluimos que:

Cuando x se aproxima a 1, ya sea por izquierda o por derecha, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más a 3

Otra alternativa es:

b) Visualizarlo a través de la gráfica de $f(x)$:



También **Concluimos** a través de la gráfica que:

Aunque la función no está definida en $x = 1$ (observa que en la gráfica se lo indica por un pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan a 3 a medida en que x se acerca a 1.

Formalizando la situación:

Esta situación se expresa diciendo que el **límite** de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1, es 3 y se simboliza:

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3}$$

La situación se **Interpreta**:

Es posible hacer que la función tome un valor tan cercano a 3 como queramos con solo tomar a x lo suficientemente cercano, pero diferente a 1.
Podemos decir entonces que el límite de la función existe en 1, aunque 1 **NO PERTENEZCA AL DOMINIO** de f.

Nota: A través de un ejemplo, observaremos que también es posible considerar el límite de una función cuando x se aproxime a algún valor que **PERTENEZCA AL DOMINIO** de f.

Ejemplo 2: Dada la función: $f(x)=x+3$ cuyo $Dom\, f=IR$. Se desea conocer cuál es el comportamiento de la función cuando x se aproxima a 2. Es decir, se desea calcular el

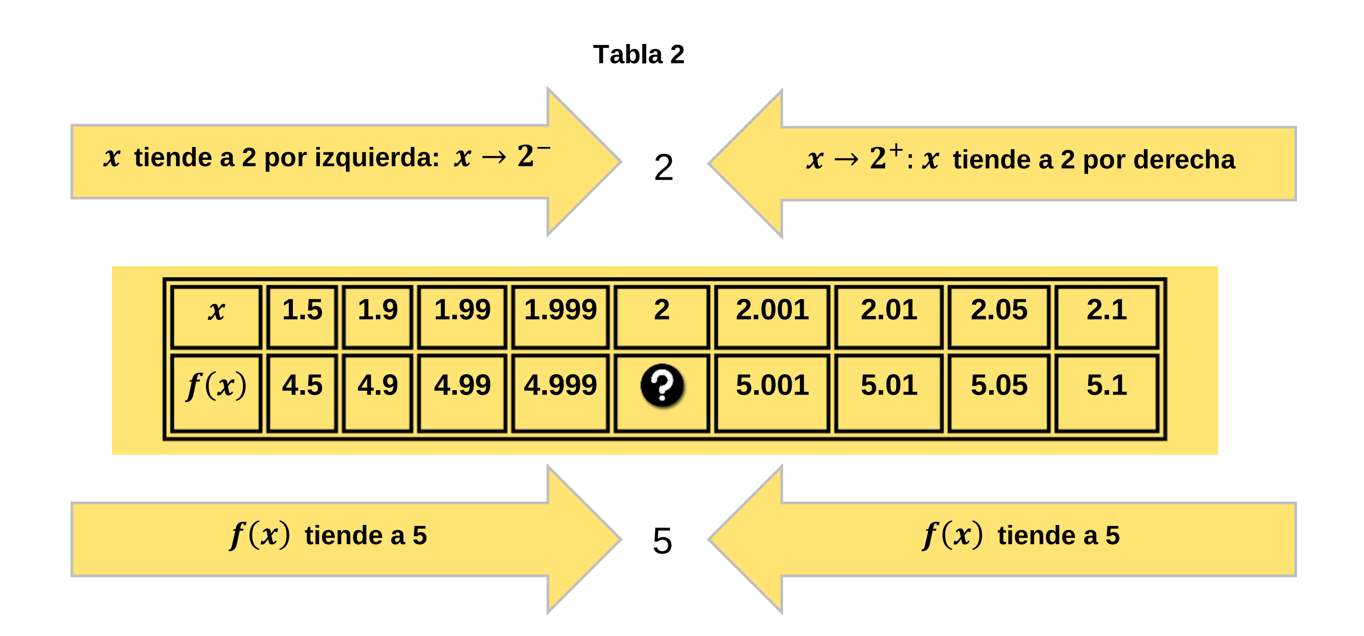
$$\lim_{x\to 2}(x+3)$$

Advierte que en este caso 2 pertenece al dominio de $(x+3)$, ya que $f(2)=5$

Utilizamos para su cálculo el mismo procedimiento que se siguió en el ejemplo 1:

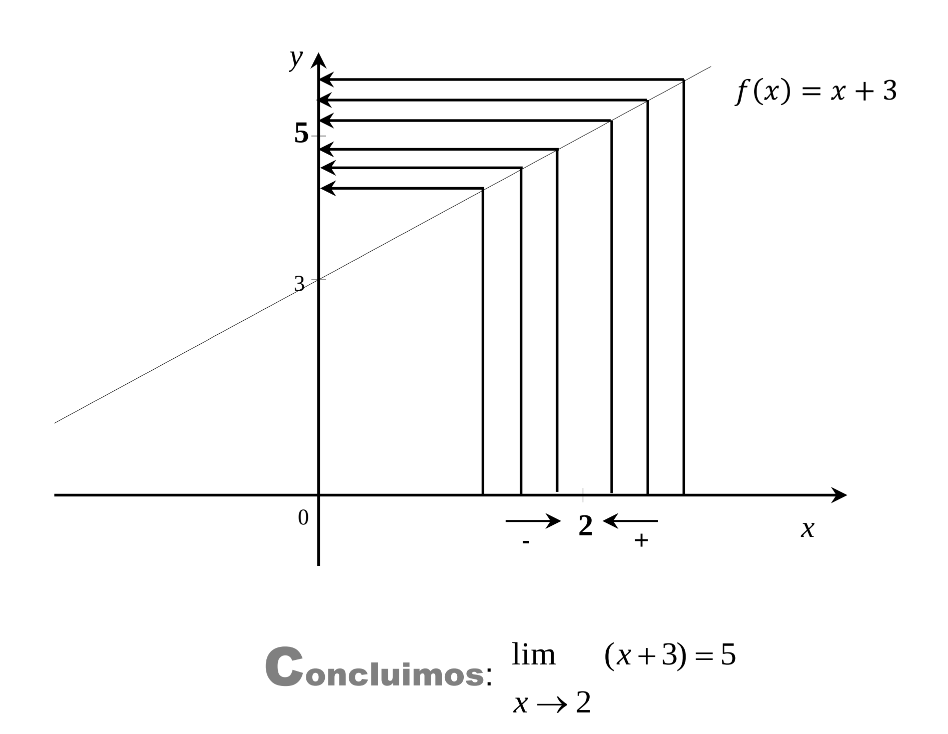
Confeccionamos una tabla:

Tabla 2



x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.05	2.1
$f(x)$	4.5	4.9	4.99	4.999	?	5.001	5.01	5.05	5.1

y a través de su gráfica:



Concluimos: $\lim\limits_{x \to 2} (x+3) = 5$

La información reunida parece apuntar a la misma conclusión: $f(x)$ tiende a 5 cuando x tiende a 2.

Cuando indagamos acerca del límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$ (x tiende al valor a) no interesa lo que le pasa a la función $f(x)$ cuando $x = a$, sino sólo lo que le sucede a $f(x)$ cuando x se **aproxima** a "$\boldsymbol{a}$" .

El límite de $f(x)$ es independiente de la manera en que x se aproxima al valor $\boldsymbol{a}$. Esto es, el límite $f(x)$ debe ser el mismo si se aproxima al valor $\boldsymbol{a}$ por la izquierda ($x \to a^-$) ó por la derecha ($x \to a^+$). La notación de los límites anteriores son:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = LL^-$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = LL^+$$

Si esto no sucede, es decir si ocurre que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Entonces la función $f(x)$ **NO TIENE LÍMITE** para $x \to a$

3.1.1 Definición de Límite de una Función.

Consideramos una función $f(x)$, y admítase que la variable independiente x puede adoptar valores próximos a una constante dada $\boldsymbol{a}$; entonces la función $f(x)$ adoptará un conjunto de valores. Supóngase que cuando la variable independiente x, se acerca al valor $\boldsymbol{a}$, entonces la **función** se acerca a un valor real.

Sea $\boldsymbol{f(x)}$ una **Función** y sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{L}$, números reales, suponiendo que $f(x)$ está definida para todos los valores de x **próximos** a $x = a$.

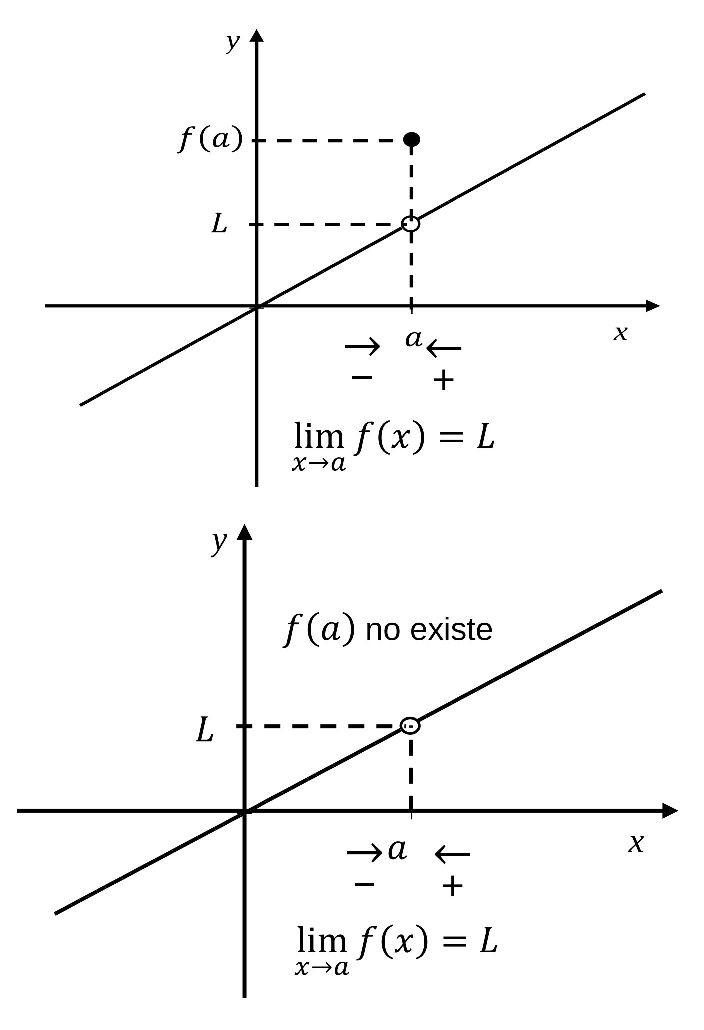
Si cuando x toma valores muy cercanos (pero **no iguales**) al valor $\boldsymbol{a}$, los correspondientes valores de $\boldsymbol{f(x)}$ pueden hacerse **arbitrariamente**

cercanos a $\boldsymbol{L}$, **para todo** $\boldsymbol{x}$ suficientemente cercano a $\boldsymbol{a}$. Entonces el número $\boldsymbol{L}$ es el **LÍMITE DE LA FUNCIÓN** $f(x)$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Nota Importante:

Si el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a existe, no necesariamente es igual al número $f(a)$, incluso $f(a)$ puede no estar definida.

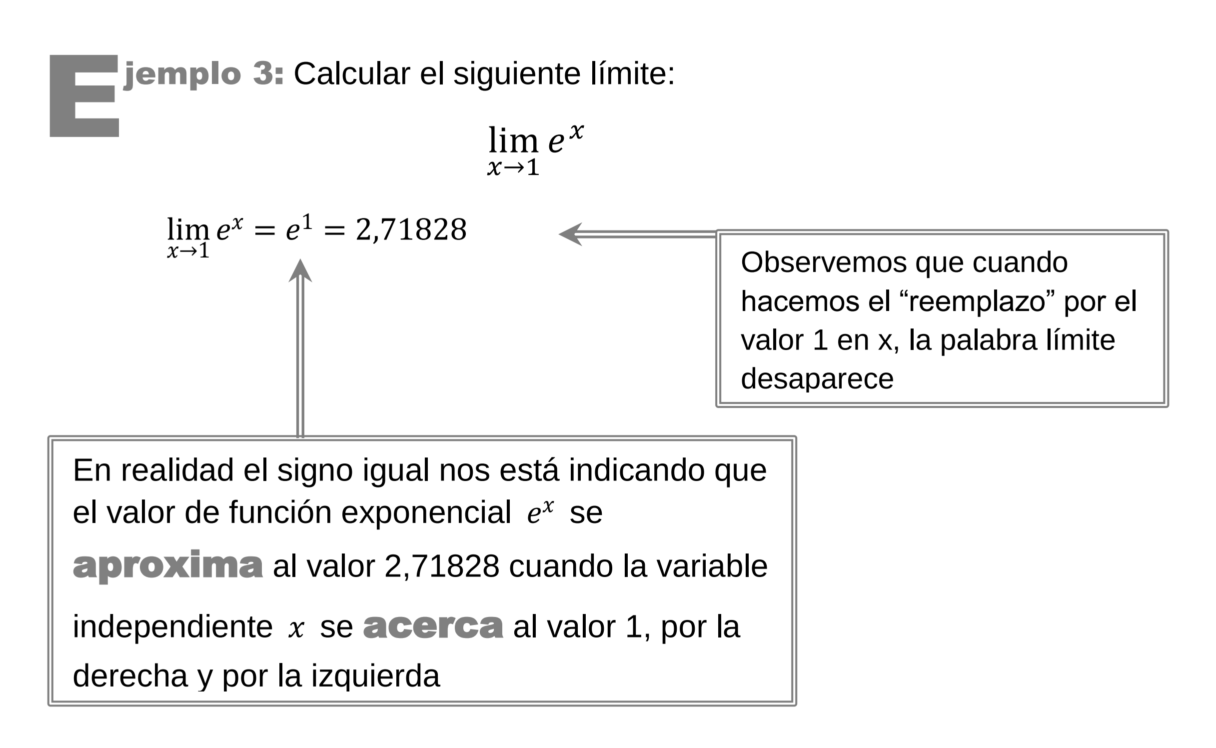


Para investigar el límite de una función, disponemos de distintos procedimientos, las tablas, los comportamientos gráficos y algebraicos.

Procedimiento Algebraico: Algunos autores lo llaman paso al límite y es un procedimiento que permite el cálculo del límite de forma rápida y segura.

Encontrar el límite Algebraicamente consiste en sustituir el valor de $x = a$ en $f(x)$ y determinar $f(a)$. Este procedimiento es una forma válida de calcular el límite de muchas funciones, pero no de todas.

Un aspecto importante en este procedimiento es que consiste en sustituir los valores de la variable independiente en la función, mientras se observa el comportamiento de $f(x)$ a medida que el valor de x va aproximándose cada vez más y más a $\boldsymbol{a}$. Se puede observar a través de la "sustitución" que el valor de la función se observa conforme a x se aproxima al valor a desde ambos lados de $\boldsymbol{a}$.



Para encontrar el límite de una función algebraicamente utilizamos las siguientes propiedades:

3.2. Propiedades de los Límites.

Estas propiedades, que enunciaremos sin demostración, permitirán el cálculo algebraico de límites:

1. Si $f(x) = k$, donde k es un número real. Entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to a} k = k}$$

En palabras:

El límite de una constante es la constante misma.

jemplo:

$$\boxed{\lim_{x \to 3} 20 = 20}$$

---

2. Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to a} x^n = a^n}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -3} x^2 = (-3)^2 = 9}$$

---

3. Si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$. Entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)}$$

En palabras:

El límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia de los límites.

$$\boxed{\lim_{x \to 1}(5 + x^3) = \lim_{x \to 1} 5 + \lim_{x \to 1} x^3 = 5 + 1^3 = 6}$$

---

4. Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$. Entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$$

En palabras:

El límite de un producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x\to 4} 2x^2(x+1) = \lim_{x\to 4} 2x^2 \cdot \lim_{x\to 4}(x+1) = 160$$

---

5. Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$. Entonces:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)};\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

En palabras:

El límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+10} = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0}(x^2+10)} = \frac{0}{10} = 0$$

---

6. Si $f(x)$ tiene límite cuando $x \to a$ y k es un número real. Entonces:

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$$

En palabras:

El límite del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x\to 2} 3x^3 = 3\lim_{x\to 2} x^3 = 3.2^3 = 24$$

Recomendación Importante:

Frecuentemente para evaluar un límite se requiere aplicar más de una de estas propiedades.

Ejemplo 4: Determinar el siguiente límite aplicando propiedades:

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + 3x - 2)$$

Aplicamos el paso al límite y las propiedades 1,2 y 6

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + 3x - 2) = \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 3x - \lim_{x \to 1} 2 = \lim_{x \to 1} x^2 + 3\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 2 = 2$$

Aplicamos la propiedad 3 Aplicamos la propiedad 6

Hasta aquí hemos analizado ejemplos en donde existe el límite de la función, pero esto no siempre sucede.

3.3. Existencia de Límites y Límites en los que Interviene Infinito.

No siempre el límite de una función existe, es decir no siempre existe un número L que satisface la definición:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Tomemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5: Deseamos averiguar la tendencia de la función:

$$g(x) = \frac{x^2+4}{x-2} \text{ cuando } x \to 2$$

Como en este caso **NO** es posible aplicar la **propiedad 5**, ya que el denominador tiende a 0 cuando x tiende a 2.

Veamos que ocurre con su límite utilizando una tabla de valores.

Tabla 3

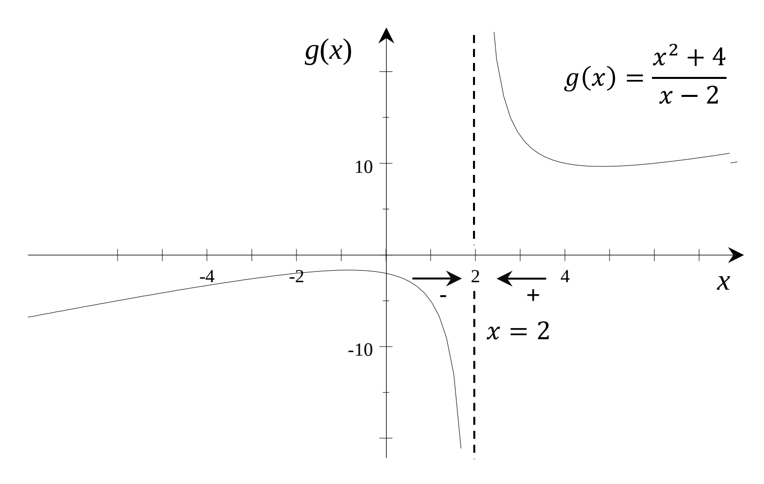
x tiende a 2 por izquierda: $x \to 2^-$ 2 $x \to 2^+$: x tiende a 2 por derecha

x	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.05
$g(x)$	-36.2	-76.1	-796	-7996	?	8004	804	164

$g(x)$ toma cada vez valores más pequeños

$g(x)$ toma cada vez valores más grande

Y gráficamente ocurre:



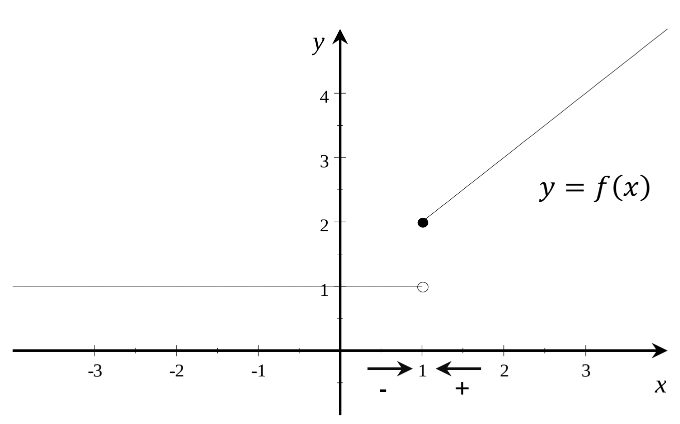
De la **Tabla** y la **Gráfica** se deduce que cuando x tiende a 2 por la **Izquierda** $g(x)$ se hace cada vez **MÁS PEQUEÑA**, pero cuando x tiende a 2 por la **Derecha** $g(x)$ se hace cada vez **MÁS GRANDE**.

De este modo como $g(x)$ no se acerca a un solo número real cuando x tiende a 2, se concluye que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x-2} = \text{no existe}$$

Veamos otro ejemplo donde el límite no existe pero tanto por la derecha de x y por la izquierda los límites se acercan a un valor:

Ejemplo 6: Dado el siguiente comportamiento gráfico de la función:



Analicemos que ocurre con el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$

La **Observación** de la gráfica de $f(x)$ nos permite ver que cuando x se aproxima a 1 desde ambos lados, los valores correspondientes de $f(x)$ no se aproximan cada vez a un solo número real.

En **Símbolos** la observación se escribe:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \end{cases}$$

Cuando x tiende a 1 por la derecha, la función tiende a tomar el valor 2

Cuando x tiende a 1 por la izquierda, la función tiende a tomar el valor 1

Esto nos permite afirmar que:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists (no\ existe)}$$

A través de los ejemplos 5 y 6 **Concluimos** que:

El límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$ **NO EXISTE** si:

1. $f(x)$ se vuelve **INFINITAMENTE** grande en valor absoluto cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$ desde cualquier lado.

   En símbolos:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$$

2. $f(x)$ se acerca cada vez más a un número $\boldsymbol{L}$ cuando x tiende a $\boldsymbol{a}$ por la derecha, pero $f(x)$ se acerca cada vez más a un número $\boldsymbol{M}$ diferente $\boldsymbol{L}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$ por la izquierda. En este caso se dice que los límites laterales son distintos.

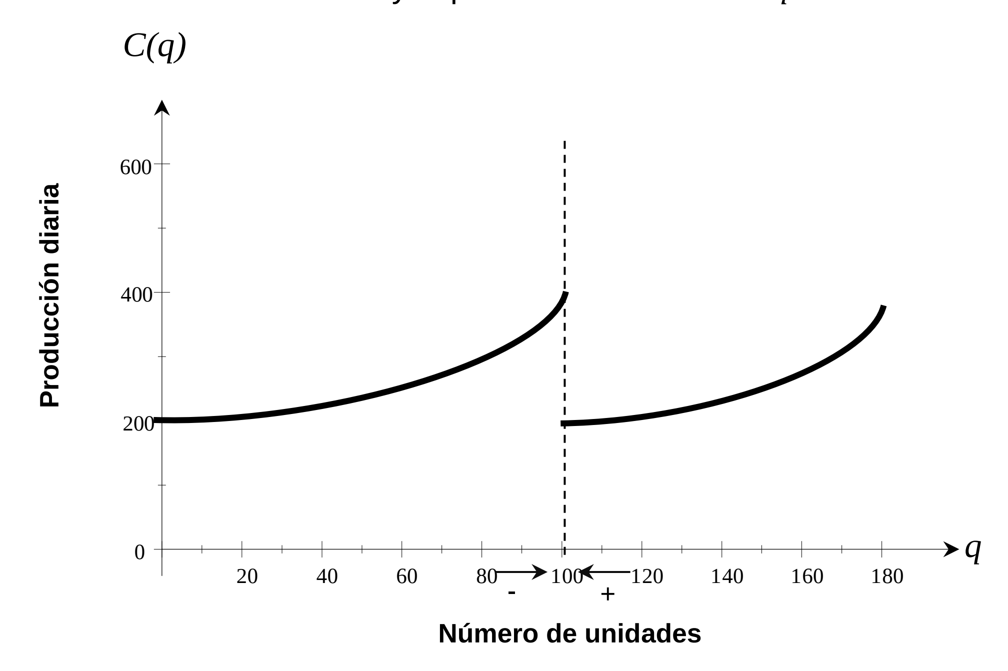
   En símbolos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = M \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = L \neq \lim_{x\to a^-} f(x) = M$$

$$\boxed{\therefore \lim_{x\to a} f(x) = \nexists}$$

Veamos en el siguiente ejemplo una aplicación económica de una función cuyo límite no existe para cuando x tiende a un valor de su dominio.

Ejemplo 7: El siguiente gráfico representa los costos de una empresa que fabrica un producto químico industrial. Los costos $C(q)$ están expresados en miles de dólares y el producto en unidades q.



Se desea conocer el comportamiento del Costo cuando el número de unidades producidas se acerca a 100, ya que la empresa podría obtener descuentos de

precios si produce entre 80 y 100 unidades y otros beneficios por compra, si su producción supera la s 100 unidades

Para responder debemos calcular:

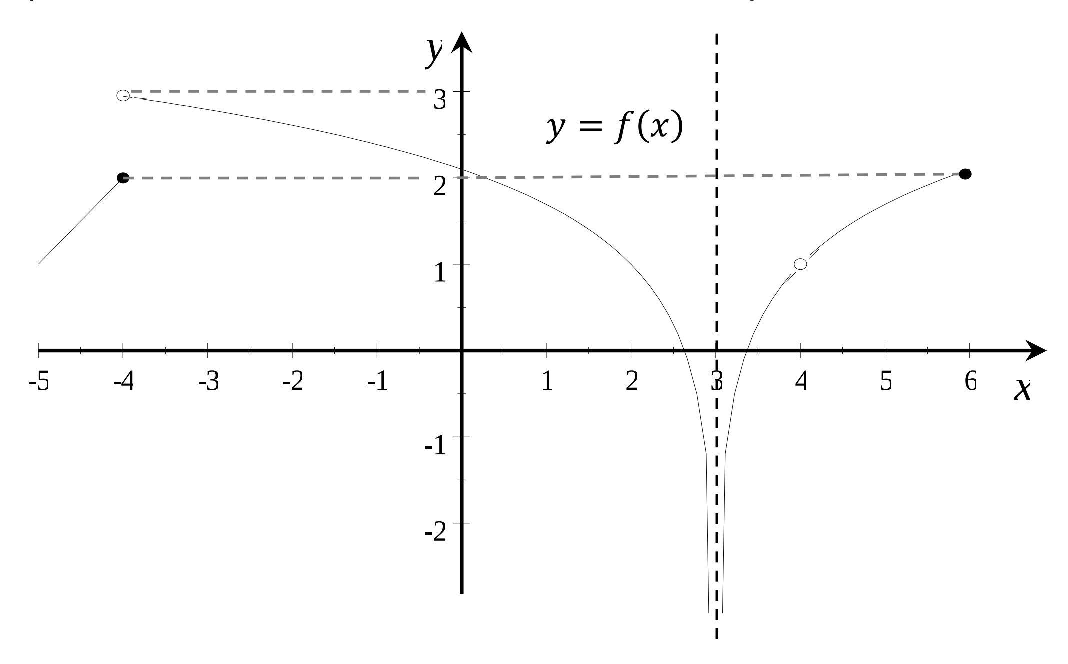
$$\lim_{q\to 100} C(q) = \begin{cases} \lim_{q\to 100^+} C(q) = 200\,Dls \\ \lim_{q\to 100^-} C(q) = 400\,Dls \end{cases}$$

Concluimos que: Cómo los límites laterales son distintos $LL^+ \neq LL^-$, se observa que el Costo cambia cuando la producción se acerca a 100 unidades, esto ocurre, por los beneficios que se ofrecen. Cuando la cantidad se acerca a 100 unidades por izquierda el Costo tiende a 400 Dls con los descuentos de precios que se ofrecen, y cuando la cantidad se acerca a 100 unidades por derecha el Costo tiende a tomar un valor menor, 200 Dls, ya que se obtienen además del descuento de precios otros beneficios por compras.

Integrando los Conceptos.

Teniendo en cuenta los conceptos hasta aquí estudiados te proponemos la siguiente actividad con el objeto de integrar lo aprendido:

Observa el siguiente gráfico y analiza el comportamiento de la función $f(x)$, determinando la existencia del límite de la función para cuando la variable independiente se acerca a los valores $x = -4$, $x = 3$ y $x = 4$



Síntesis de lo Aprendido:

Hasta aquí hemos establecido que:

✓ El límite de una función $f(x)$ para cuando $x \to a$ **EXISTE** si se verifica que: $\lim_{x \to a} f(x) = L \ \ siendo\ a\ \ y\ L\ \ números\ reales$

✓ El límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$ **NO EXISTE** si:

1. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \nexists$

ó

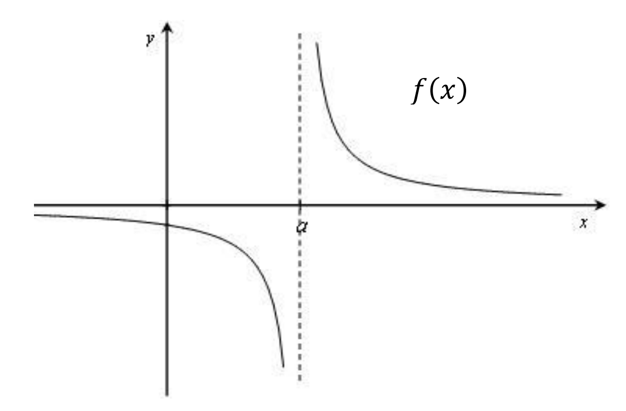
2. $$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) = L \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = M \end{cases} \Rightarrow LL^+ \neq LL^- \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \nexists$$

Veremos ahora qué pasa con $f(x)$, si $\boldsymbol{a}$ ó $\boldsymbol{L}$ no asumen valores reales.

3.3.1 Asíntotas Horizontales y verticales.

Vimos anteriormente que existen situaciones donde la función **no tiene límite**, se presenta cuando los valores funcionales crecen o decrecen **sin cota**, es decir que se vuelven infinitamente grandes (en valor absoluto) al aproximarse $\boldsymbol{x}$ a un cierto valor $\boldsymbol{a}$.

Veamos dos comportamientos gráficos que ilustran lo afirmado:

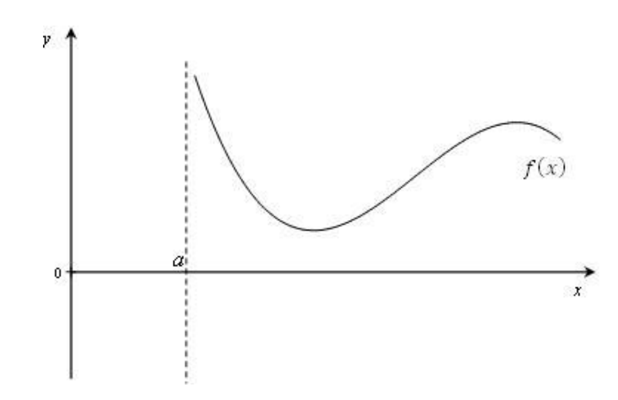


$$Dom\ f = IR - \{a\}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

Como al menos uno de sus límites laterales tiende a infinito, se concluye que el:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \nexists}$$



$$Dom\ f = (a, +\infty)$$

Aquí el único límite que se puede analizar alrededor de a es el límite por la derecha de a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

Luego:

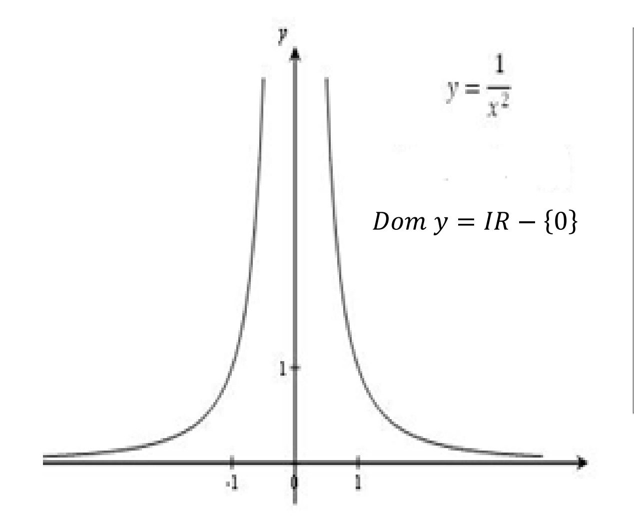
$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \nexists}$$

Determinemos a través de un ejemplo algebraico la existencia del siguiente límite:

jemplo 8: Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

Como el denominador tiende a cero cuando x tiende a cero, hemos visto que no es posible aplicar la propiedad del límite de un cociente, (el denominador se anula cuando reemplazamos el valor de la variable independiente), entonces a través de una tabla y del comportamiento gráfico observaremos el comportamiento de la función $f(x)$ cuando x se aproxima a cero.



x	$y = f(x)$
1	1
0,5	4
0,1	100
0,01	10000
0,001	1000000
-0,001	1000000
-0,01	10000
-0,1	100
-0,5	4
-1	1

Notar que:

Al dividir el numerador 1, por valores cercanos a cero obtenemos como resultado un número cada vez más grande.

Es claro que, cuando $x \to 0$ por la izquierda ó por la derecha, $f(x)$ aumenta sin cota, por ello se concluye que **no existe el límite** cuando $x \to 0$, $f(x)$ se vuelve infinito.

En **forma simbólica** expresamos este tipo de comportamiento, escribiendo:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$$

Advertencia:

El uso del signo igual, **no significa que el límite exista**, es porque, el símbolo ∞ (que no es un número real), **INDICA** que **no existe límite** al crecer o decrecer $f(x)$ sin cota

Examinando el comportamiento gráfico, se puede deducir que cuando $f(x)$ crece sin cota, se aproxima sin llegar a alcanzar a una recta vertical, que en el ejemplo coincide con el eje de ordenadas y que se denomina **ASINTOTA VERTICAL**. En este caso, la asíntota vertical coincide con el eje de ordenadas siendo su ecuación $x = 0$.

Observación:

Generalizando, es posible concluir que, si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Entonces ocurre que:

- ✓ $f(x)$ no tiene límite cuando $x \to a$
- ✓ $f(x)$ asume valores infinitamente grandes en valor absoluto cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\boldsymbol{a}$.
- ✓ $x = a$ es asíntota vertical de f.

DEFINIMOS a la **ASÍNTOTA VERTICAL**:

La **Recta de Ecuación** $\boxed{x = a}$ es una **Asíntota Vertical** de la gráfica de f **sí y sólo sí** se presentan alguno de los siguientes casos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad ó \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

ó

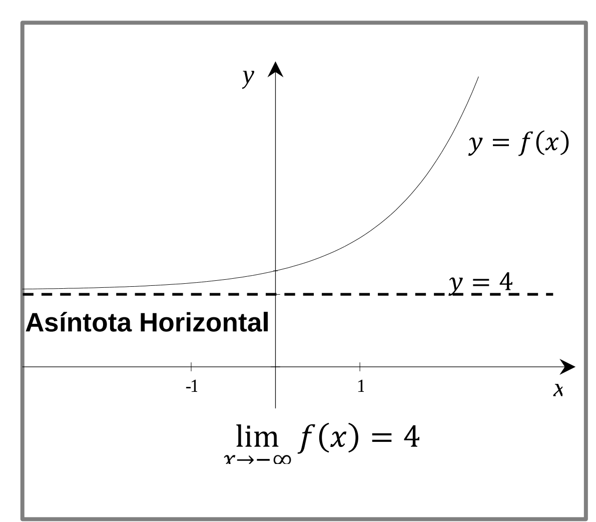
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad ó \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

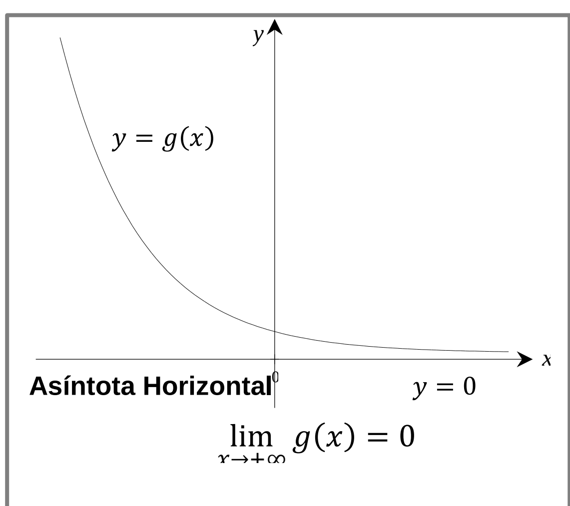
En todos estos casos, la función $f(x)$ crece o decrece **sin límite**.

A menudo se desea conocer el comportamiento de una función conforme aumenta o disminuye la variable independiente sin límite alguno (tanto positiva como negativamente). Se dice entonces que la variable independiente se aproxima al infinito (o tiende al infinito).

Analicemos seguidamente, la situación que se presenta cuando $\boldsymbol{a}$ no asume valores reales, es decir cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$

Como ilustración de este caso, observa los comportamientos gráficos de dos funciones que tienden a un valor real L cuando la variable independiente tiende a $\pm\infty$.





En los gráficos puede advertirse que las funciones tienden a tomar un valor finito real cuando las variables independientes crecen o decrecen sin cota. La función del gráfico de la izquierda tiende a acercarse al valor 4, cuando la variable independiente decrece indefinidamente y la función del gráfico de la derecha tiende a valer cero, cuando la variable x crece indefinidamente.

En estos casos puede afirmarse que ambas funciones tienen **ASÍNTOTA HORIZONTAL.**

En **Símbolos**:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$ $\Rightarrow$ la recta $y = 4$ es **Asíntota Horizontal**

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ $\Rightarrow$ la recta $y = 0$ es **Asíntota Horizontal**

DEFINIMOS a la **ASÍNTOTA HORIZONTAL**:

La **Recta de Ecuación** $\boxed{y = L}$ es una **Asíntota Horizontal** de la gráfica de f **sí y sólo sí** se presentan alguno de los siguientes casos:

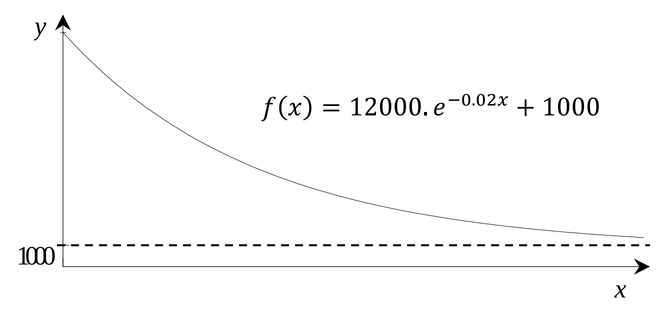
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE ASINTOTAS.

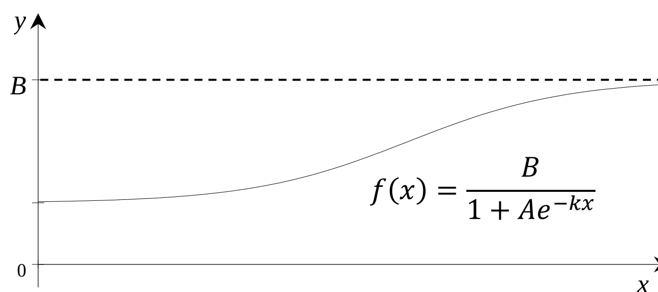
El límite de una función cuando la variable independiente crece sin cota, puede dar información útil en situaciones prácticas.

Por ejemplo, si la variable representa el tiempo, dicho límite describe lo que le sucederá a la función "a través del mismo" (a largo plazo).

Esta interpretación se ilustra en los comportamientos de las funciones que representan:



Representa el valor de una maquinaria industrial cuyo valor decrece exponencialmente a lo largo del tiempo y tiende a 1.000 dólares (valor de desguace). En este caso el valor 1000 dls, representa una cota mínima del valor residual de la maquinaria.



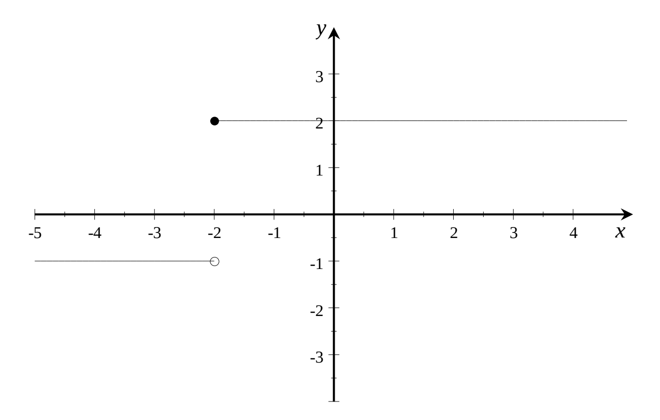
Representa el crecimiento de una población, el mismo se aproxima a un valor B , sin alcanzarlo. En este caso B representa una cota máxima del crecimiento poblacional

Antes de estudiar el concepto de continuidad de funciones, reflexionaremos algunos de los conceptos vistos hasta aquí.

¿Qué hemos aprendido?

Te proponemos las siguientes actividades para que evalúes e integres los conceptos hasta aquí desarrollados:

Actividad 1: Evaluemos la existencia de límite de la función graficada, para cuando $x \to -2$ y luego haremos el mismo análisis pero para a cuando $x \to 0$



En este caso no tenemos la expresión analítica de la función (aunque podríamos deducirla), por lo que haremos el análisis a partir de su comportamiento gráfico.

Para evaluar la existencia del límite para cuando $x \to -2$ recuerda el siguiente **PROCEDIMIENTO**:

1) Observa el valor al que tiende la función cuando nos acercamos a $x = -2$ por izquierda.

2) Observa el valor al que tiende la función cuando nos acercamos a $x = -2$ por derecha.

3) Compara ambas imágenes, y concluir.

Para la existencia del límite para cuando $x \to 0$, el **PROCEDIMIENTO** es:

1) Observa el valor al que tiende la función cuando nos acercamos a $x = 0$ por izquierda

2) Observa el valor al que tiende la función cuando nos acercamos a $x = 0$ por derecha

3) Compara ambas imágenes, y concluir.

Actividad 2: Determinar el límite de la siguiente función definida por segmentos cuando $x \to 0$ y analizar la existencia de asíntotas

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & para \;\; x < 0 \\ x^2 + 16 & para \;\; x > 0 \end{cases}$$

Para determinar el límite te proponemos el siguiente **PROCEDIMIENTO**:

1) Representa gráficamente la función ya que nos sería de ayuda para evaluar el límite. Recuerda que este tipo de función en la que aparece más de una fórmula para distintos valores del dominio, se denomina función definida por segmentos según lo estudiado en la Unidad 1

2) Una vez graficada, realiza la observación del valor al que tiende la función cuando x tiende a cero por la izquierda y por derecha y escribe en símbolos dicha observación.

3) Compara las imágenes de la función y determina la existencia del límite.

4) Te proponemos que también analices el mismo límite de forma analítica, es decir realiza el paso al límite teniendo en cuenta las ecuaciones que definen a la función.

5) Determina la existencia de asíntotas verticales y horizontales aplicando la definición y encuentra la ecuación de la asíntota.

En algunos casos cuando analizamos el límite de una función, es posible arribar a algunos resultados que pueden confundirnos, por ello seguidamente te ofrecemos un cuadro en el cual alternativamente se anula o resulta ∞ el numerador al tiempo que, el denominador asume un valor finito (L) (distinto de cero) o a la inversa, así como el caso en que ambas se anulan o se hacen infinito a la vez.

Generalmente si $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ entonces los límites que podemos encontrar se resumen en la tabla siguiente:

Tabla 4

$x \to a$ **$x \to +\infty$** **$x \to -\infty$**	**$L/\pm\infty$**	**$\infty / \pm L$**	**$L / 0$**	**$0 / L$**	**$0 / 0$**	∞ / ∞
EL RESULTADO ES:	**0**	∞	∞	**0**	**INDETERMINADO**	

Las dos últimas columnas que aparecen con un resultado **INDETERMINADO** representan los casos que se presentan cuando al calcular el límite de funciones, aplicando las propiedades vistas, se obtienen expresiones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Estas expresiones **no permiten** conocer la tendencia de la función cuando la variable se aproxima a "a".

Es decir que si al calcular $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se obtiene $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ debemos recurrir a algún **procedimiento** que nos permita averiguar qué sucede con $f(x)$ cuando x tiende a $\boldsymbol{a}$.

Un **procedimiento** consiste en factorizar las funciones $f(x)$ y/o $g(x)$ de manera que al evaluar nuevamente el $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se haya levantado la indeterminación:

jemplo 9: Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

Si hacemos el paso al límite tendríamos que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\ Indeterminación$$

Para salvar la indeterminación factorizamos el polinomio numerador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

Es decir que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

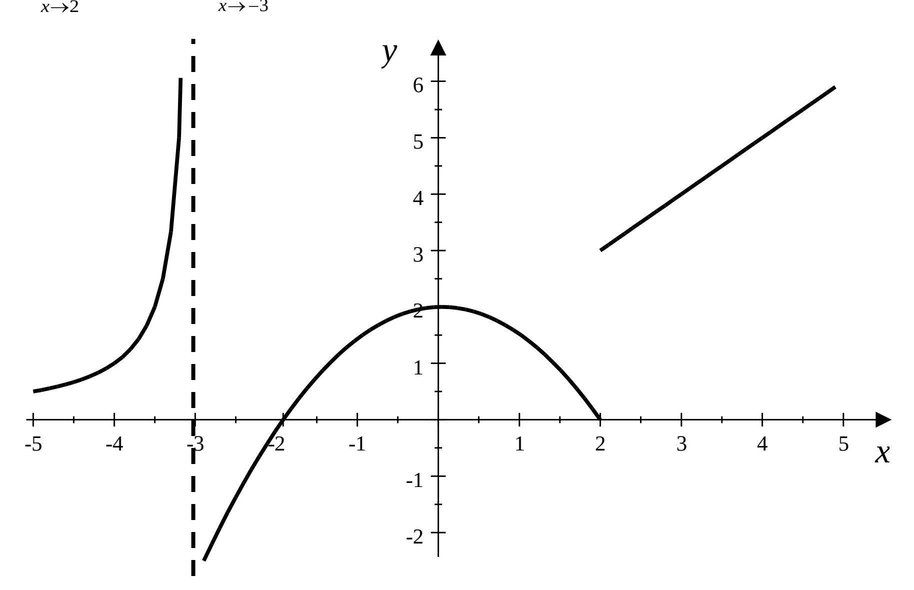
En la práctica resolveremos estas indeterminaciones con un procedimiento más sencillo que estudiaremos en la última unidad.

Te proponemos las siguientes actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

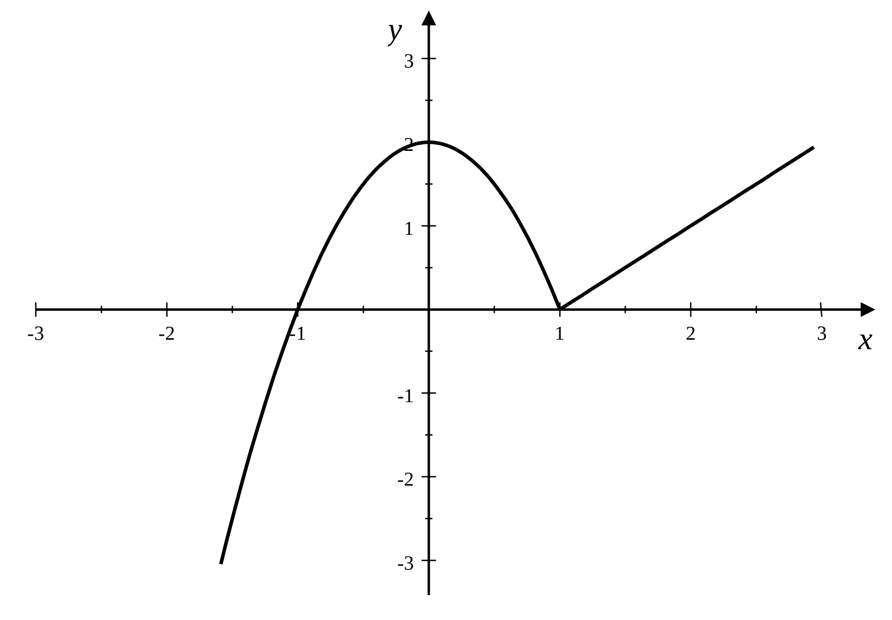
Actividad 3:

Determina gráficamente los siguientes límites, justificando su respuesta:

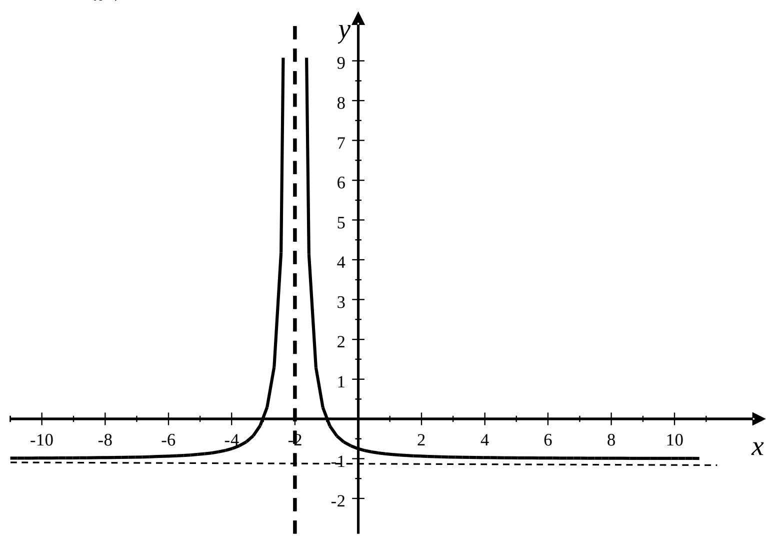
a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ y $\lim_{x \to -3} f(x)$



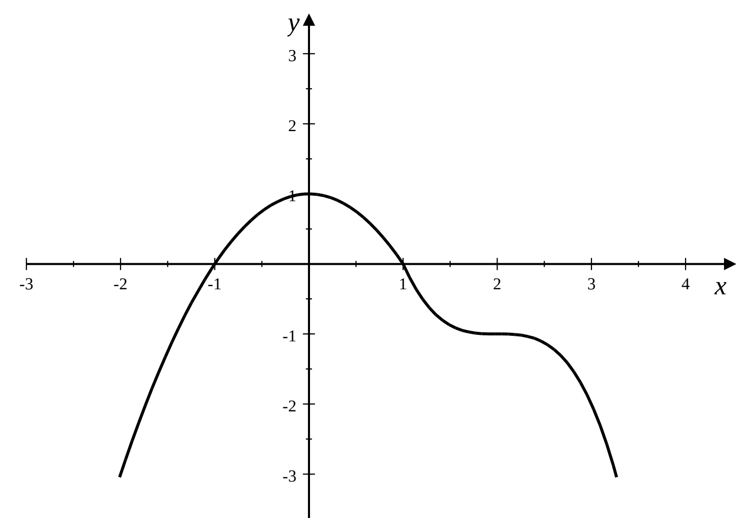
b) $\lim_{x \to 1} f(x)$



c) $\lim_{x\to -2} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$



d) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$



Actividad 4:

Determina analíticamente el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{2x+1}{x^3-2}$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x^2-1}$

c) $\lim_{x\to 7} \sqrt{2+x}$

d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

e) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2}{x+1}$

Actividad 5:

Se estima que t meses después del inicio de la crisis económica, el porcentaje de la población económicamente activa que se encontrará desempleada estará dado por: $P(t) = \frac{3}{1+e^{-0.2t}} + 2{,}745$. Se desea saber:

a) ¿Qué porcentaje estará desempleado al cabo de 3 meses?

b) ¿Qué porcentaje estará desempleado a largo plazo?

Actividad 6:

El costo (en pesos) de eliminar $x\%$ de la polución del agua en cierto riachuelo está dado por: $C(x) = \frac{75000x}{100-x}$ para 0 ≤ x ≤100. Evalúa e interpreta el resultado del $\lim_{x\to 100} C(x)$

Actividad 7:

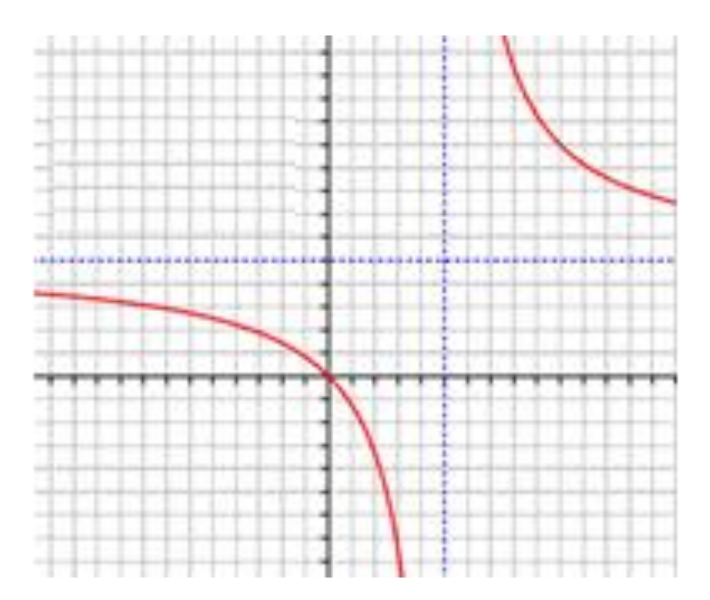
Identifica si las siguientes funciones presentan en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ algún tipo de asíntota. En caso afirmativo, exprese la correspondiente ecuación.

a) $h(x) = \frac{5}{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & si\ x < 2 \\ x-1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x - 4 & para\ x < 0 \\ x^2 + 16 & para\ x > 0 \end{cases}$

Determina a través del siguiente gráfico Asíntota vertical y horizontal, expresando las ecuaciones correspondientes.



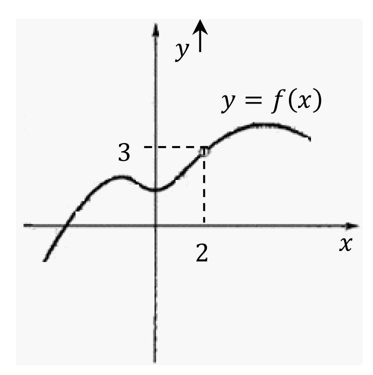
3.4. Continuidad.

En matemáticas, el término continuo tiene prácticamente el mismo significado que le damos en su uso cotidiano. La definición matemática de la continuidad comprende las propiedades de los límites.

Intuitivamente se puede afirmar que una función es continua en un punto si es posible dibujar la gráfica de la función cerca del punto sin levantar el lápiz del papel. Por el contrario una función es discontinua en un punto si el lápiz debe levantarse del papel para dibujar la gráfica en ambos lados del punto. Aunque esta **NO ES LA DEFINICIÓN** que nosotros utilizaremos; es para dar la idea de continuidad.

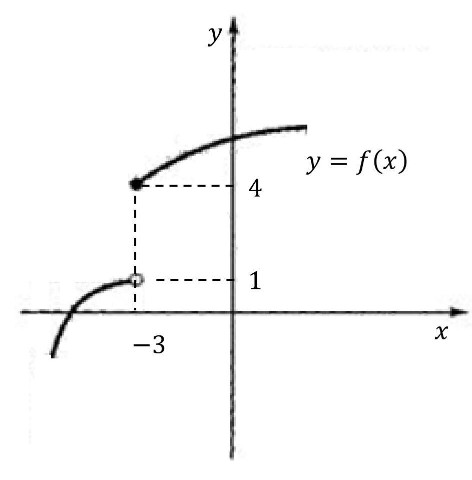
A continuación te presentamos tres gráficos de funciones que son discontinuas:

jemplo 1:



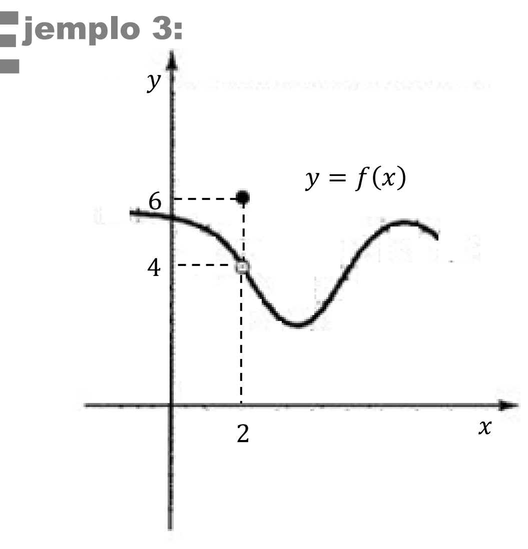
En esta gráfica, la función presenta un círculo abierto en el punto $(2,3)$ que indica que en ese punto hay un "agujero" en la gráfica. Es decir en $x = 2$ la función no está definida, aun cuando la función tiende a 3 cuando x se acerca a 2 por izquierda y por derecha. Luego la función tiene límite para x que tiende a 2

Ejemplo 2:



En esta gráfica, la función es discontinua en $x = -3$, debido al salto de 3 unidades que muestra el comportamiento gráfico. Es decir, cuando x se acerca a -3 por izquierda la función tiende a tomar el valor 1 y cuando se acerca a -3 por derecha la función se aproxima a 4. Luego, la función no tiene límite para cuando x tiende a -3, ya que sus límites laterales son distintos.

Ejemplo 3:



Aquí la función también es discontinua en $x = 2$. Observa que cuando x está cerca de 2, los valores de $f(x)$ tienden a 4, por lo que a cada lado de $x = 2$, la función se aproxima a 4. Pero cuando x toma el valor 2, la función toma el valor 6. Es decir, que el límite de la función no coincide con la función evaluada en el punto $x = 2$

Del primer ejemplo podemos establecer que para que una función sea **continua** $f(a)$ debe **estar definida**, de lo contrario la gráfica presentaría un "hueco".

Pero el último ejemplo indica que esto no es suficiente para garantizar la **continuidad**, también es necesario que cuando $\boldsymbol{x}$ tienda a $\boldsymbol{a}$, $f(x)$ debe estar muy cerca de $f(a)$.

Estas consideraciones conducen a la siguiente definición:

3.4.1. Definición de Continuidad en un Punto y en un Intervalo.

Continuidad en un Punto:

Una función f es continua en el punto $x = a$ si cumple que:

a) $f(a)$ *está definida*

b) $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*

c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si una función f **no cumple** alguna de esas tres condiciones, se dice que la

Función es **NO ES CONTINUA** en $x = a$

La continuidad de una función se puede analizar gráficamente, como en los ejemplos 1, 2 y 3 anteriores o analíticamente, como lo desarrollaremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Dada la función: $f(x) = x^2 - 2x$ determinar si es continua en el punto $x = 1$.

Para ello debemos comprobar si se cumplen las tres condiciones enunciadas anteriormente para $\boxed{x = 1}$.

a. $f(1) = 1^2 - 2.1 = -1$ luego la **Función** está **Definida.**

b. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x) = -1$ luego el **Límite Existe.**

c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Se concluye entonces que la **Función** es **Continua** en $x = 1$

Hemos analizado la Continuidad de una función en un punto. Ahora lo haremos en un intervalo.

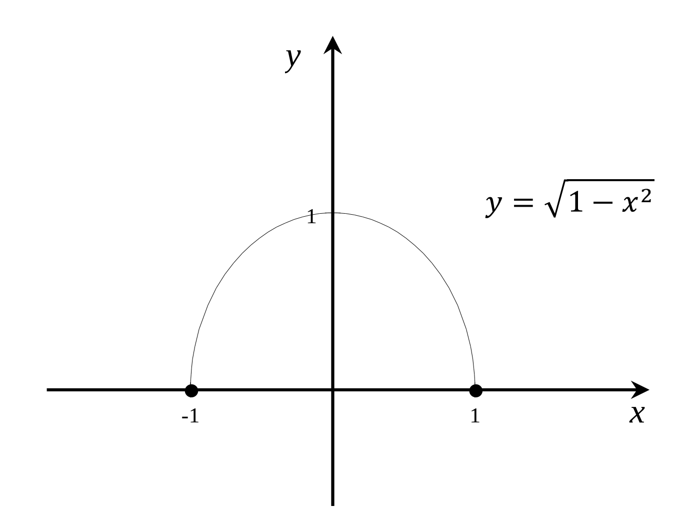
Continuidad en un Intervalo:

- ✓ Una función es continua en un intervalo abierto $\boxed{(a; b)}$ si es continua en todo número que pertenezca al intervalo.
- ✓ Una función es continua en un intervalo cerrado $\boxed{[a; b]}$ si es continua en $(a; b)$ y además:

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)}$$

Un intervalo abierto $(a;b)$ incluye los valores comprendidos entre a y b sin incluir los extremos del intervalo y un intervalo cerrado $[a;b]$ incluye los valores comprendidos entre a y b y también los extremos a y b.

Ejemplo: Dada la función $y=\sqrt{1-x^2}$ cuyo gráfico es:



Deseamos analizar la continuidad en el intervalo cerrado $[-1,1]$

Gráficamente observamos que la función es continua en el intervalo abierto: $(-1;1)$. Es decir que se cumple que:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-a^2}=f(a)\ \ \forall a\in(-1;1)$$

Ahora debemos comprobar si se cumple que los límites por la derecha de -1 y por la izquierda de 1 existen. Efectivamente gráficamente se observa que:

$$\lim_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}=0\ \ existe \qquad y \qquad \lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0\ \ existe$$

Luego, la **Función** $y=\sqrt{1-x^2}$ es **Continua** en el intervalo **Cerrado**: $[-1,1]$.

PROPIEDADES de funciones continuas:

La **Combinación** de funciones **Continuas** da como **Resultado** otra función **Continua**:

- ✓ Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$ entonces las siguientes funciones también son continuas en $\boldsymbol{a}$.

  Producto: $f(x) \,.\, g(x)$

  Suma: $f(x) + g(x)$

  Resta: $f(x) - g(x)$

  Cociente: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad siempre \;\; que\, g(a) \neq o$

- ✓ Los siguientes tipos de funciones son continuas en sus dominios.

  Funciones polinómicas: $f(x) = a_0 + a_1\, x^1 + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$

  Funciones racionales: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ $\quad siempre \;\; que\, q(x) \neq o$

  Funciones radicales: $f(x) = \sqrt[n]{x}$

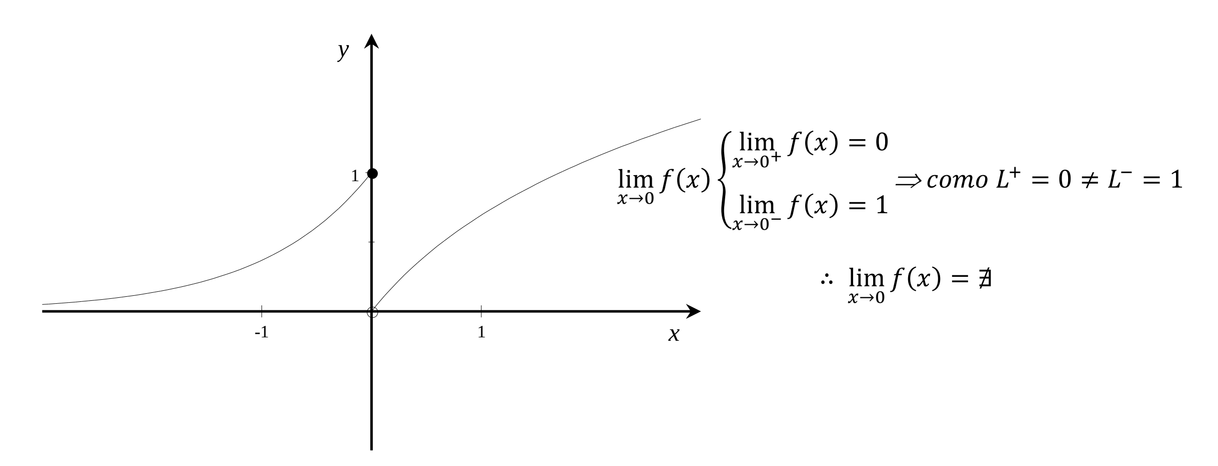
  Funciones trigonométricas: $sen\, x$ y $\cos x$

OBSERVACIÓN:

No siempre una función es continua en su **dominio** de definición. Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ \ln(x+1) & si \quad x > 0 \end{cases} \qquad Dom\, f = IR$$

Está definida para todo número real, es decir que su $Dom\,f = IR$ sin embargo esta función no es continua en $x = 0$. Observando su gráfico deducimos que si bien la función está definida en $x = 0$ ya que $f(0) = e^0 = 1$, el límite de f para cuando x tiende a cero no existe:



Las funciones que no son continuas, se denominan funciones **Discontinuas**

3.4.2. Funciones discontinuas Evitables y no Evitables.

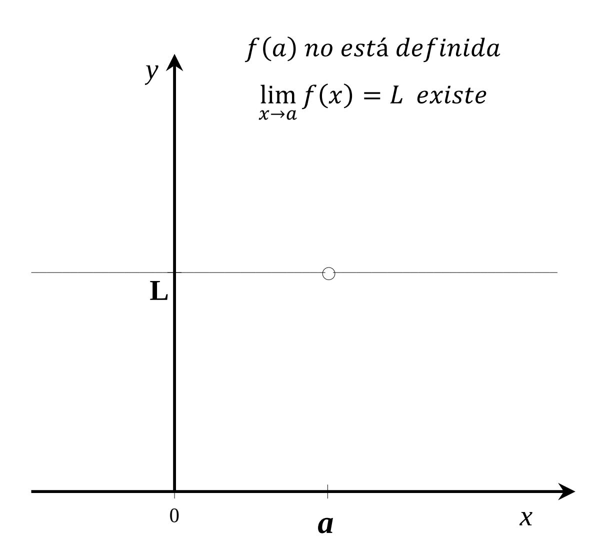
Las **Discontinuidades** se clasifican en dos categorías: **Evitables** e **Inevitables**, tal cual su nombre lo indica, según sea posible evitar o no la discontinuidad que presentan.

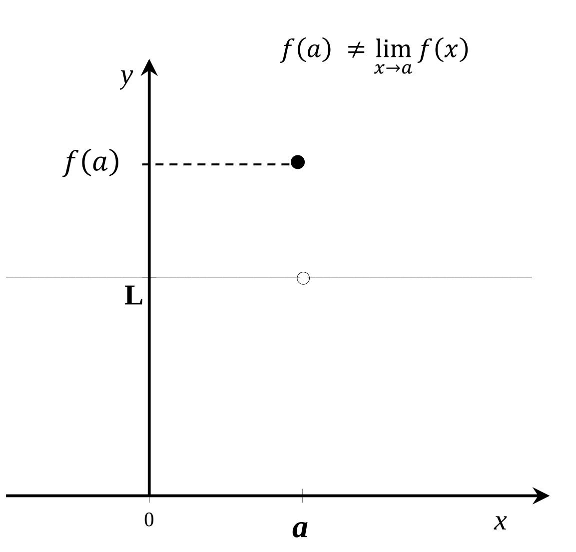
Una **Discontinuidad** en a, se denomina **Evitable** si f se puede hacer continua definiendo (o redefiniendo) $f(a)$.

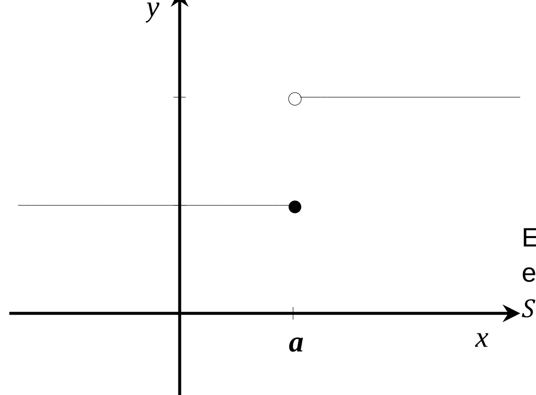
Es decir, una discontinuidad es evitable cuando el **Límite** de la función **Existe** para cuando x tiende al punto a, pero no coincide con la **Función** evaluada en a ó cuando la función **NO está definida** en a

Para ilustrar lo anterior, observa los siguientes ejemplos.

Discontinuidad **Evitable**



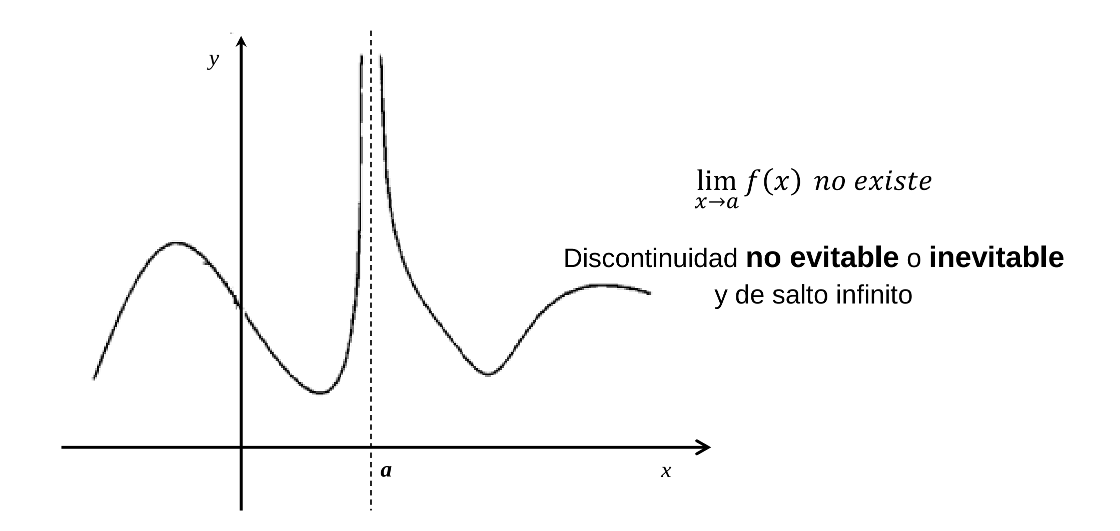




$\lim_{x\to a} f(x)$ *no existe*

Discontinuidad **no evitable** o **inevitable** de salto finito. Pues no es posible evitar la discontinuidad ya que el límite no existe.

El salto de la función representa la diferencia en valor absoluto de los límites laterales: $S = |LL^{+} - LL^{-}|$



Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 9:

Para cada uno de los gráficos de la Actividad 3 de esta Unidad, analiza si representan funciones continuas o discontinuas, en caso que sea discontinua clasifique el tipo de discontinuidad que presentan.

Actividad 10:

Halla analíticamente si las siguientes expresiones representan funciones continuas o discontinuas. En caso de que sea discontinua, clasifique el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<2 \\ 4 & si\ x>2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<2 \\ 1 & si\ x\geq 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<2 \\ 1 & si\ x=2 \\ 4 & si\ x>2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x\leq 2 \\ \dfrac{2}{x-2} & si\ x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & si\ x\neq 4 \\ 8 & si\ x=4 \end{cases}$

UNIDAD IV:

Conceptos Básicos de Diferenciación

Índice

Unidad IV: Conceptos Básicos de Diferenciación

Unidad IV

En las unidades anteriores hemos estudiado que una variable puede variar en función de otra y así surge el concepto de función Por ejemplo, si un **AUTO** se desplaza sobre una recta su posición x es función del tiempo t, es decir que para cada instante t el auto está en una determinada posición x, todo esto se indicaba diciendo que $x = f(t)$.

En esta unidad nos interesa estudiar la **Velocidad de Variación** de una variable con respecto a otra variable. Es decir, nos abocamos al estudio de medir la **Rapidez** con que se produce el **Cambio** de una situación. Por ejemplo, si el **AUTO** anterior recorre 100 Km en 1 hora, la variable posición x varió más rápido que si el mismo auto recorrió 55 Km en 1 hora.

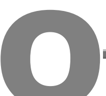
Esta idea de **Rapidez** de **Variación**, está asociada al concepto de **Derivada**.

La Derivada de una función es uno de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial.

En esta unidad, además de **definir** el concepto, se mostrará su **significado** y se hallarán las **derivadas** de las **funciones** más usuales. Es de fundamental importancia dominar la derivación para después poder abordar el trazado de curvas en la Unidad V, así como para comprender la utilidad del cálculo integral, que se estudiarán en Análisis Matemático II.

Una de las **Aplicaciones** del concepto de **Derivada** en Ciencias Económicas es el análisis de los **RITMOS** de **CAMBIO** de funciones, como es el estudio del **Ritmo** al que **Crece** una población determinada o el ritmo de la inflación.

La noción de derivada es históricamente anterior al concepto de límite aunque actualmente se estudie aquélla inmediatamente después de éste, por razones que se exponen en esta unidad.



bjetivos

General:

Desarrollar habilidades y destrezas en el cálculo de la derivada de una función para utilizarla como herramienta de trabajo en el estudio y análisis de situaciones problemáticas de las Ciencias Económicas.

Específicos:

- ✓ Interpretar geométricamente la definición de derivada de una función.
- ✓ Distinguir entre derivada en un punto de una función y su función derivada.
- ✓ Aplicar fluidamente las reglas de derivación para calcular la derivada de funciones reales.
- ✓ Aplicar la interpretación económica de la derivada de una función en el análisis marginal de funciones económicas.

4.1. La Derivada.

La **Derivación** es una técnica matemática de excepcional poder y versatilidad. Es uno de los conceptos centrales en las ramas de las matemáticas llamada **Cálculo** y tiene una variedad de aplicaciones que incluyen el esbozo de curvas, la optimización de funciones y el análisis de ritmos de cambio.

El **CÁLCULO** surgió cuando se necesitó averiguar, no solo los cambios que se efectúan en las funciones, sino lo más o menos rápido en que las funciones cambian. En **CÁLCULO** se infiere qué está o qué "debe estar" sucediendo en un punto particular a partir del conocimiento sobre lo que está pasando en otros puntos que tienden a él. Un ejemplo de esta situación se establece en el mundo del mercado, cuando una persona de negocios quiere saber a qué ritmo están cambiando sus ingresos con respecto a la inversión que realiza en publicidad.

El comportamiento gráfico, tanto como la expresión analítica de una función, dan los valores de una variable en relación con los de otra variable, pero la **Variación** o el cambio de una respecto de la otra puede producirse en forma más o menos **rápida**.

Apreciemos la **Rapidez** de **variación** a través de los siguientes comportamientos gráficos de estas dos funciones:

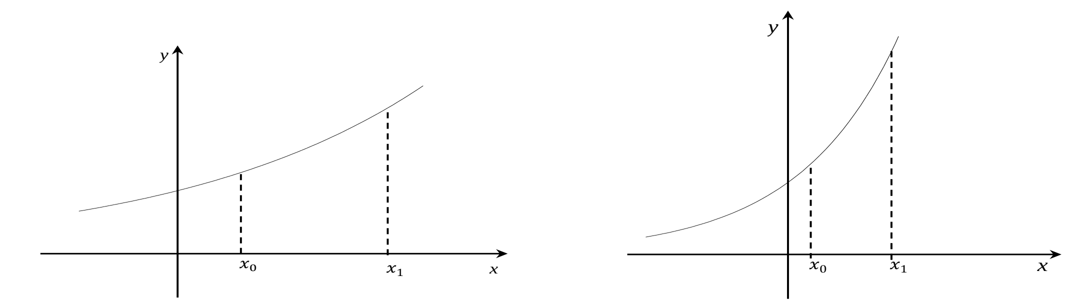
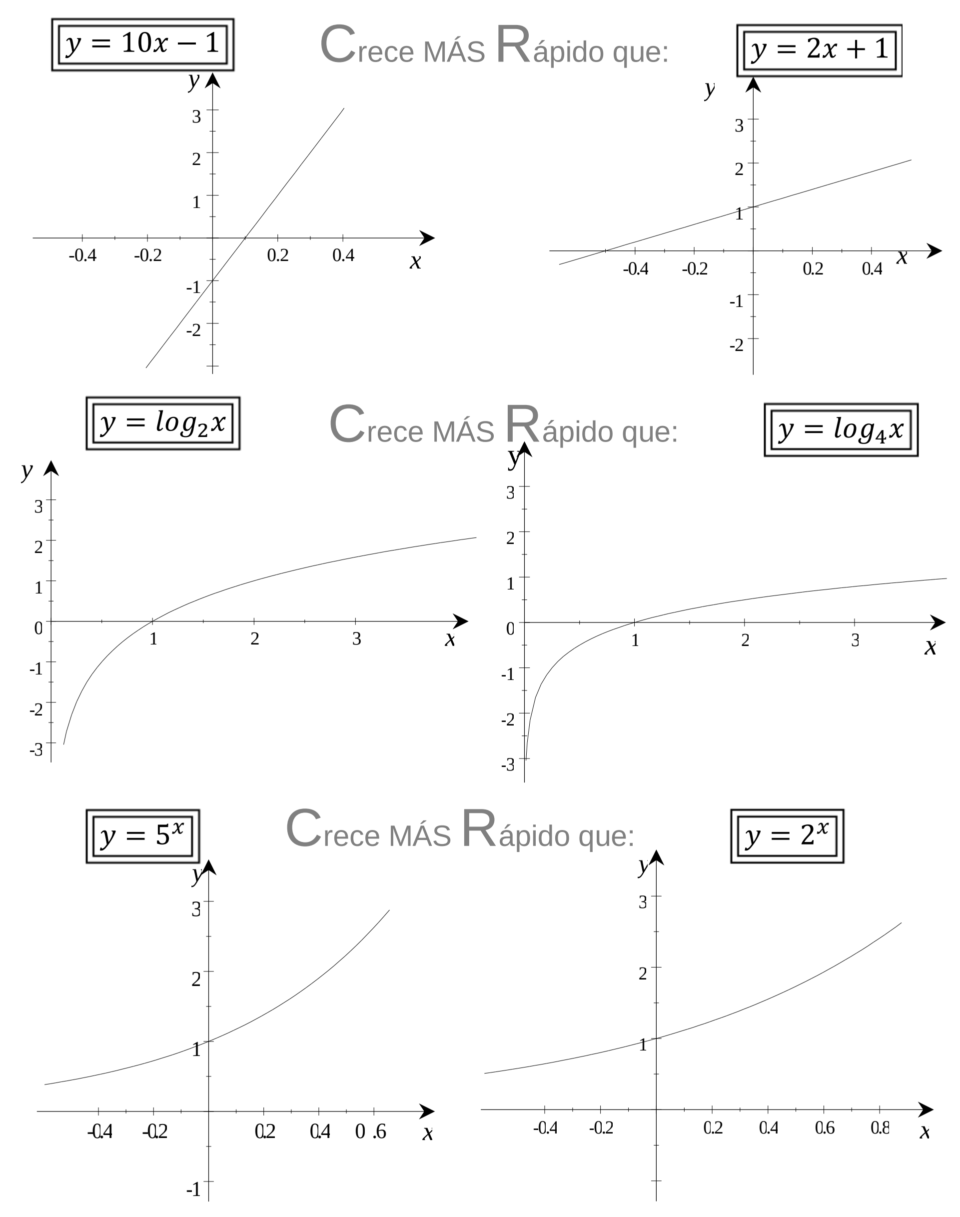


Figura 1

En ambas gráficas, se puede observar que y aumenta al aumentar x, pero gráficamente se puede advertir que la segunda **CRECE MÁS RÁPIDO** que la primera.

En este punto nos preguntamos: ¿Cómo MEDIMOS eso? ¿Cuánto más RÁPIDO crece la segunda que la primera?.

Recordemos algunas de las Funciones que estudiamos en la Unidad **2**, y tengamos en cuenta sus comportamientos gráficos. De este modo podemos observar que:



Las afirmaciones anteriores las podemos hacer dado que estas funciones las hemos analizados en unidades anteriores.

Para conseguir **MEDIR LA RAPIDEZ DE CAMBIO** de una variable con respecto a la otra, comenzaremos refiriéndonos a como varía "y" con relación a la variación de "x".

Antes de abocarnos a medir la rapidez de cambio de la variable dependiente con respecto a la variable independiente, repasemos algunos conceptos estudiados en las dos unidades anteriores:

Incrementos Absolutos:

Cuando establecemos la VARIACIÓN o INCREMENTO de $\boldsymbol{y}$ ó de $\boldsymbol{x}$ por separado nos referimos a incrementos absolutos de y o de x , simbolizados por Δy y Δx respectivamente:

En símbolos:

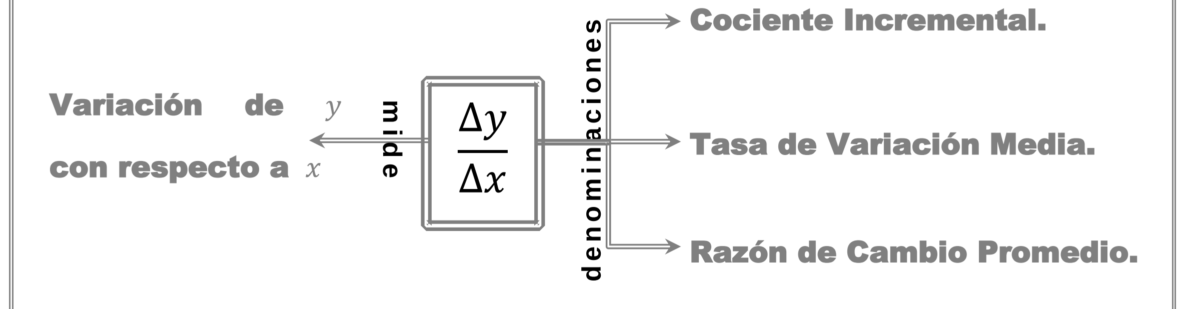
Sí y varía de y_1 a y_2, el Incremento Absoluto de la Función es: $\boxed{\Delta y = y_2 - y_1}$

Sí x varía de x_1 a x_2 , el Incremento Absoluto de la Variable es: $\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$

Incrementos Relativos:

Cuando Relacionamos los Incrementos, para medir cuánto varía una con relación a la variación de la otra, obtenemos Variaciones Relativas. Como Δy expresa el cambio en la función, y Δx el cambio en la variable independiente, su Cociente informa acerca de cuánto está cambiando en Promedio la Función por **cada unidad** de variación de la **variable independiente.**

En símbolos:

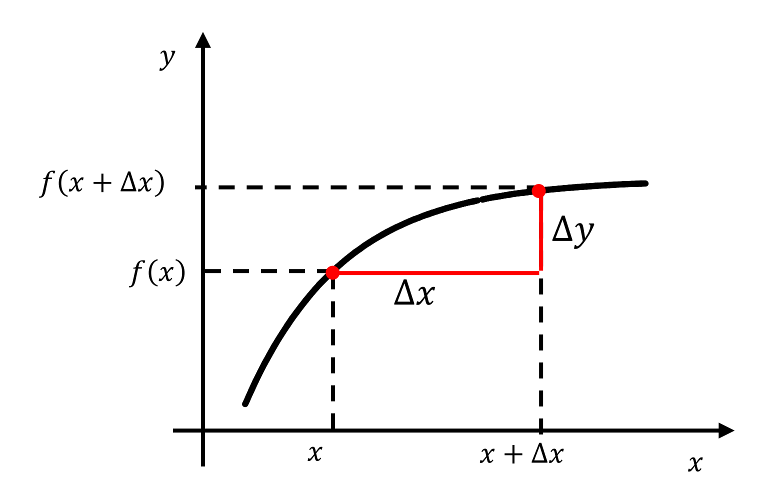


En la Unidad 2 al estudiar Función Lineal habíamos aprendido que el cociente: $\boxed{\frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}}$, era la Pendiente de la recta y constante sobre el dominio de la función lineal. Además nos informaba sobre el Ritmo de Cambio de la Función Lineal.

Entonces, como en una función lineal el crecimiento es uniforme, el cociente incremental: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ constituye una medida exacta para evaluar la Tasa de Cambio de $\boldsymbol{y}$ con respecto al cambio en $\boldsymbol{x}$. Por ejemplo: Si en una función lineal de Costo, "x" denota el número de unidades producidas, la Pendiente indicará la Tasa a la que se incrementa el Costo Total respecto a los **CAMBIOS** en el Nivel de Producción (cualquiera sea el nivel de producción).

En las funciones No Lineales, la Tasa de Cambio en el valor de "y" en relación con un cambio de "x" **NO ES CONSTANTE,** y recibe el nombre de **LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA** y aproxima el ritmo de cambio de la función no lineal sobre algún intervalo.

Para apreciar la información que aporta ésta tasa, en funciones No Lineales, observa el siguiente gráfico:



En funciones **NO LINEALES**, donde el ritmo de cambio **no es constante** la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos permite obtener un "**Promedio**" de la variación de una función respecto de la variable en un intervalo $[x, x + \Delta x]$

Geométricamente este cociente incremental o **Tasa de Variación Media** (**T.V.M**), es la **PENDIENTE** de la **RECTA SECANTE** a la curva por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ como se aprecia en la figura

2. Luego por definición de pendiente estudiada en la unidad 2, tenemos que analíticamente la T.V.M es:

$$\text{T.V.M } [x, x+\Delta x]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \boxed{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

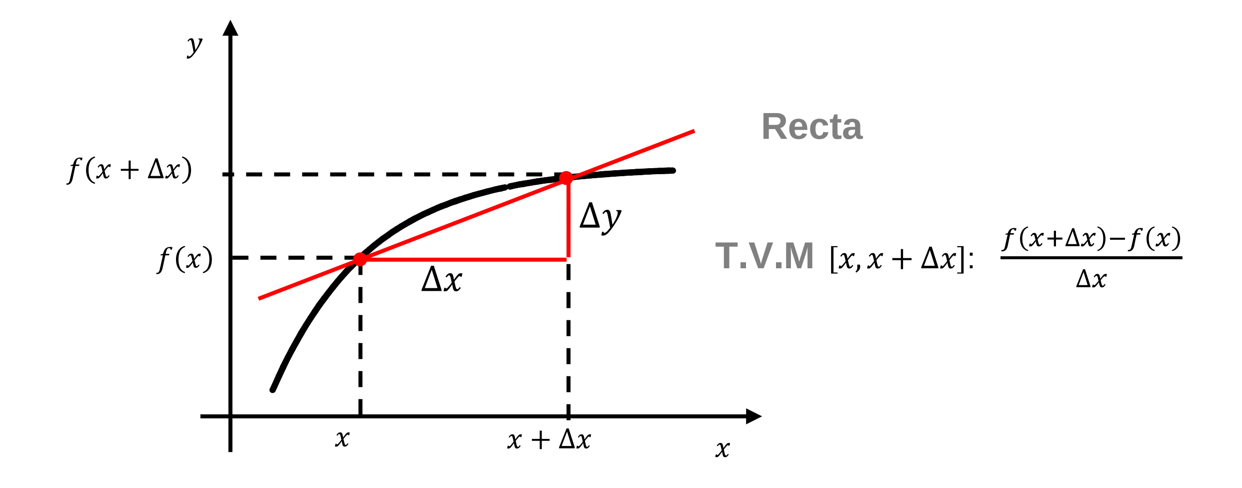
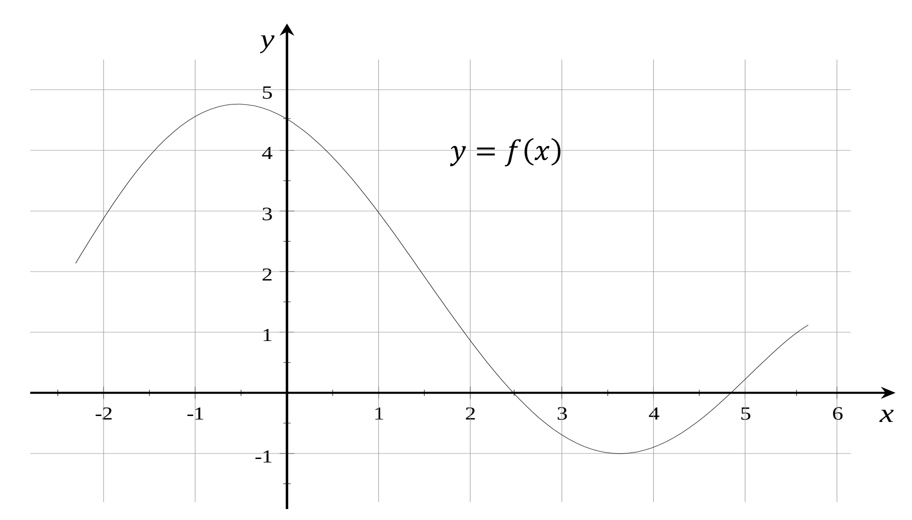


Figura 2

Ejemplo: A través del siguiente comportamiento gráfico:



Calculamos las siguientes **Tasas de Variación Media** sobre los siguientes intervalos:

T.V.M. $[-2,0]$: $\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \frac{4.5-3.9}{\boxed{2}} = 0.3$

T.V.M. $[-2,-1]$: $\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{4.5-3.9}{\boxed{1}} = 0,6$

T.V.M. $[-2,-1.5]$: $\frac{f(-1.5)-f(-2)}{-1.5-(-2)} = \frac{4-3.9}{\boxed{0.5}} = 0{,}2$

T.V.M. $[0{,}2.5]$: $\frac{f(2.5)-f(0)}{2.5-0} = \frac{0-4.5}{\boxed{2.5}} = -1.8$

T.V.M. $[0{,}1]$: $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{3-4.5}{\boxed{1}} = -1.5$

T.V.M. $[0{,}0.5]$: $\frac{f(0.5)-f(0)}{0.5-0} = \frac{4-4.5}{\boxed{0.5}} = -1$

Advierte que la Tasa de Variación Media de la función, fue variando en función del intervalo considerado.

A través de la Figura 3, puedes apreciar cómo se modifican las Pendientes de las rectas Secantes cuando varía el Incremento de x. Al hacer el incremento $\boxed{\Delta x}$ cada vez más pequeño, o sea que Δx tienda a cero, la recta Secante tiende a convertirse en la recta Tangente a la curva en un punto. Esto que implica que la Variación Media de la función dentro de un intervalo, tiende a convertirse en la Variación Instantánea de la función en un punto.

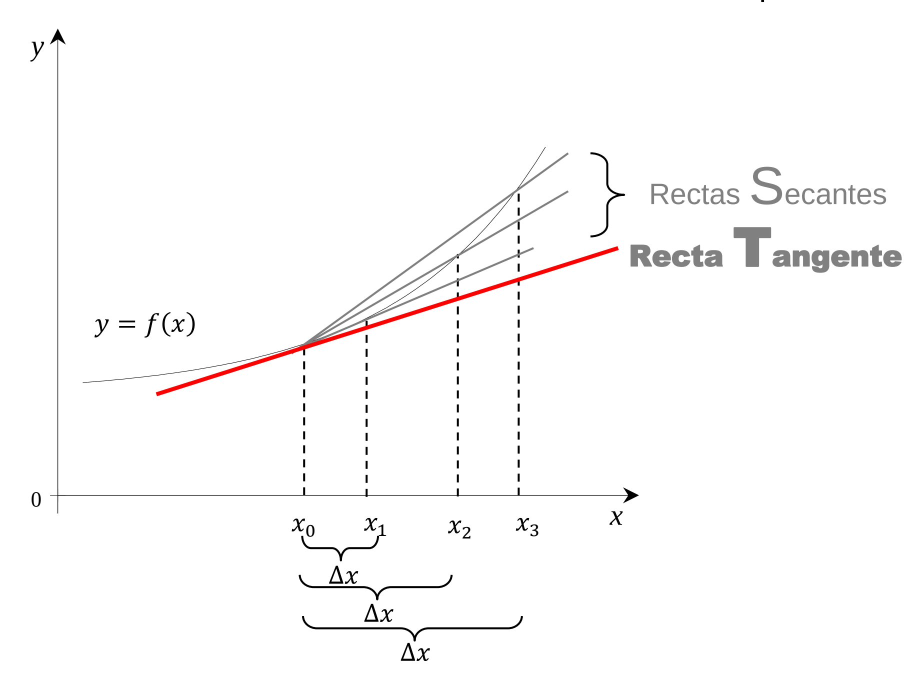


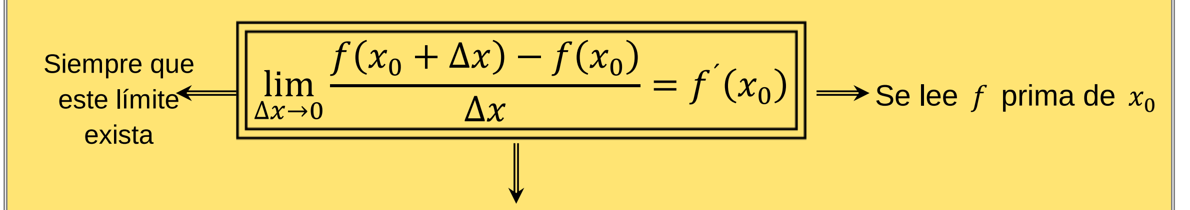
Figura 3

La Variación Media	$\longrightarrow$	La Variación Instantánea
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\longrightarrow$	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Estas ideas gráficas nos llevan a formalizar el concepto de Derivada de una función en un punto x_0:

4.1.1 Cálculo de la Derivada de una función en un Punto.

Sea f una función de variable real y sea x_0 un punto del dominio de f. La **Derivada** de f en x_0, se denota por $f'(x_0)$ y se define como:

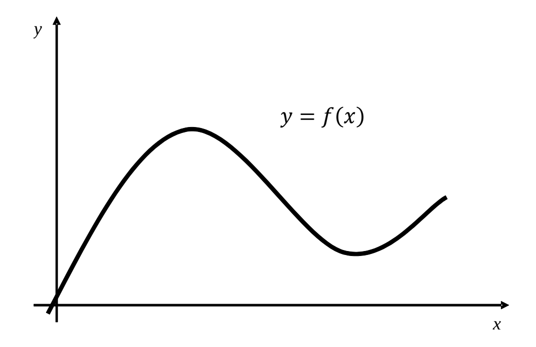


es la **Variación Instantánea** o Ritmo Instantáneo de Cambio de $f(x)$ en $x = x_0$

4.1.2 Interpretación Geométrica de la Derivada.

Lo que vimos en el apartado anterior, nos permite afirmar que la información sobre el **Ritmo** al que está creciendo o decreciendo en cualquier **punto** una **Función NO LINEAL Geométricamente** está dada por la **Pendiente** de la **Recta** que es **Tangente** al gráfico de la **Función** en **CADA UNO** de los puntos evaluados.

Supongamos que una función $f(x)$ tiene el siguiente comportamiento gráfico:



Y trazamos rectas tangentes en algunos puntos de la curva, por ejemplo:

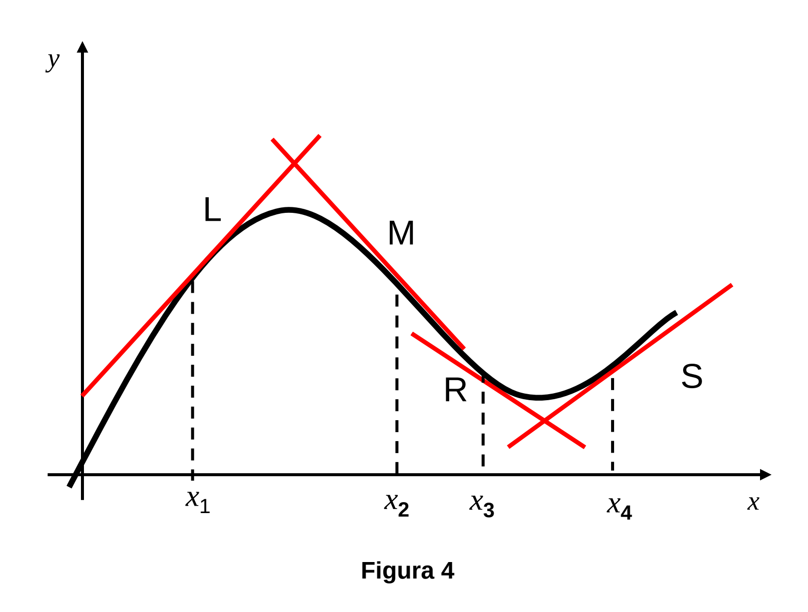


Figura 4

Hemos expresado anteriormente que el ritmo de cambio de $f(x)$en x_1 es la pendiente de la recta tangente L que tiene pendiente m_1 positiva. Pero aquí nos preguntamos ¿Qué significa?, pues teniendo en cuenta la información que nos brinda la pendiente, según lo estudiado en la unidad 2, decimos que en el punto x_1 la función está creciendo m_1 unidades por cada unidad que crece x.

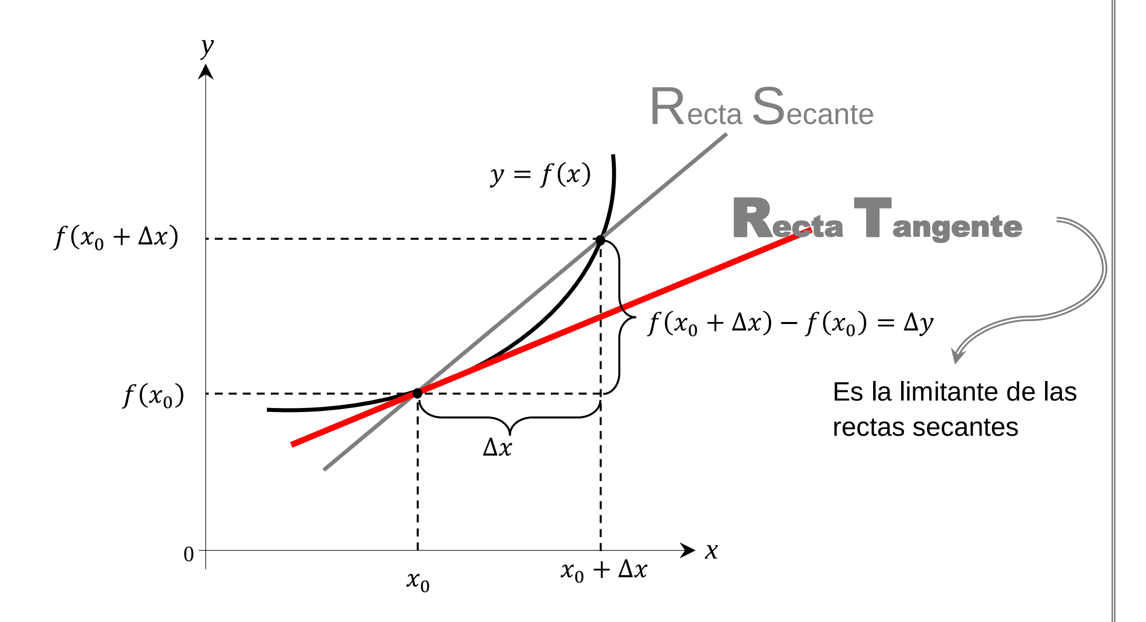
En el punto x_2 el ritmo de cambio de $f(x)$en x_2 es la pendiente de la recta tangente M que la llamamos m_2. Cuyo significado es que en el punto x_2 la función decrece m_2 unidades por cada unidad que crece x.

Análogamente podemos concluir para x_3 y x_4.

Los resultados observados en la figura 4 los formalizamos de la siguiente manera:

Geométricamente:

La derivada de una función en un punto de su dominio x_0 es **la Pendiente de la Recta Tangente a la Curva en el Punto** $(x_0, f(x_0))$. Mide el Crecimiento **Instantáneo** o puntual de una **Función** cualquiera en un punto x_0.



Por definición de pendiente estudiada en la Unidad 2 sabemos que la pendiente entre los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ que es la pendiente de la recta secante, está dada por: $m_{sec} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Entonces la pendiente de la recta tangente, estaría dada por:

$$m_{tg} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Esta fórmula nos indica que hallar la **Derivada** de cualquier **Función** en cualquier **Punto** de su dominio pasa por calcular el límite de un **Cociente**

Incremental. Luego nos podríamos preguntar si ¿la **Derivada** de una función en un punto siempre **Existe**?. Obviamente que la respuesta nos lleva a preguntarnos si ¿siempre el límite del cociente incremental existe?.

En el párrafo que sigue damos un resultado que no demostraremos pero que nos asegura la existencia o no de la Derivada.

4.1.3 Derivabilidad y Continuidad.

En el párrafo anterior vimos que calcular la **Derivada** de una **Función** consiste en evaluar el **Límite** del **Cociente Incremental**:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Con lo cual si ese límite no existe, tampoco existirá la derivada.

Tomemos dos gráficos de Funciones que en un punto de su Dominio la derivada no existe:

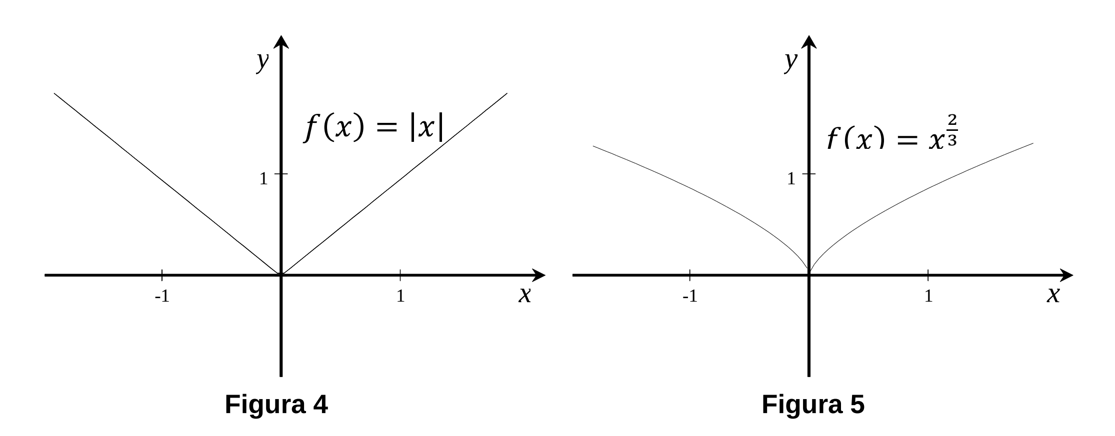
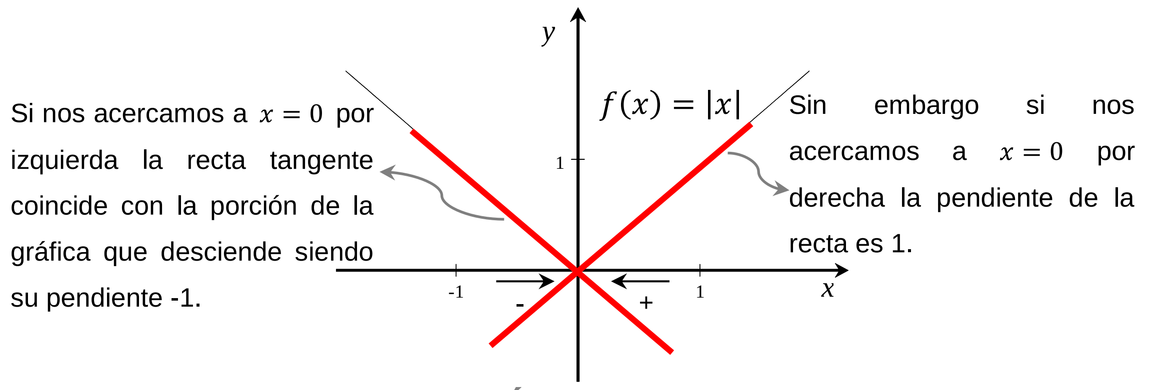


Figura 4 **Figura 5**

Observemos que las dos funciones **NO SON DERIVABLES** en $x = 0$, a pesar que las dos están definidas en $x = 0$, es decir que cero pertenece al dominio de las funciones.

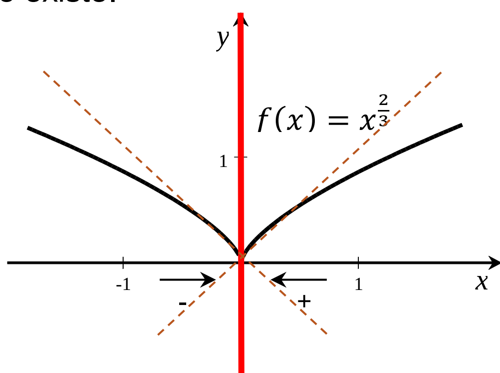
No obstante, las razones por las cuales no son derivables o diferenciables en ese punto son de naturaleza distinta:

- ✓ En la Figura 4 la **Derivada** en $x = 0$ **NO EXISTE** pues la **Recta Tangente** no puede ser determinada unívocamente.



Al **NO** poder trazar una **ÚNICA** recta tangente al punto, se afirma que la función **NO ES DERIVABLE** en dicho punto.

- ✓ En la Figura 5 la **Derivada** en $x = 0$ **NO EXISTE** pues si bien la **Recta Tangente** es única la misma es una recta vertical. Por tanto la pendiente no existe.



Cuando nos acercamos a $x = 0$ tanto por izquierda como por derecha, las rectas tangentes tienden a una **Única Recta Tangente** en dicho punto, pero en este caso se trata de una **Recta Vertical** y sabemos que la **Pendiente** de una recta vertical **NO EXISTE**.

Veamos otro caso en que la **Función NO es Diferenciable** o derivables en $x = 0$.

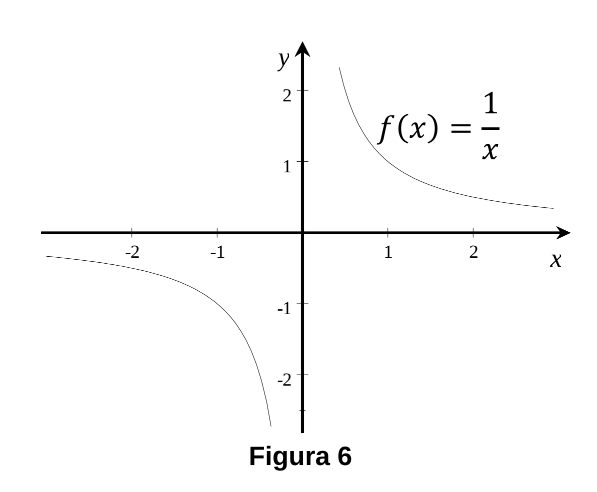


Figura 6

En la figura 6 la **FUNCIÓN NO ES CONTINUA** $x = 0$, y al no estar definida la función en ese punto tampoco será posible trazar una **Recta Tangente** y por ello tampoco es derivable en ese punto.

Resumen:

Una Función es Derivable o Diferenciable en un punto $x = x_0$, si:

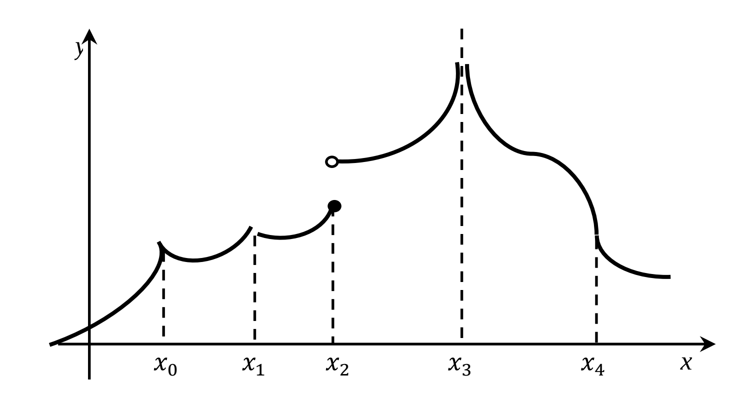
- ✓ Es Continua en $x = x_0$ y no presenta puntos angulosos (Figura 4) o puntos cúspides (Figura 5) en $x = x_0$

Observación:

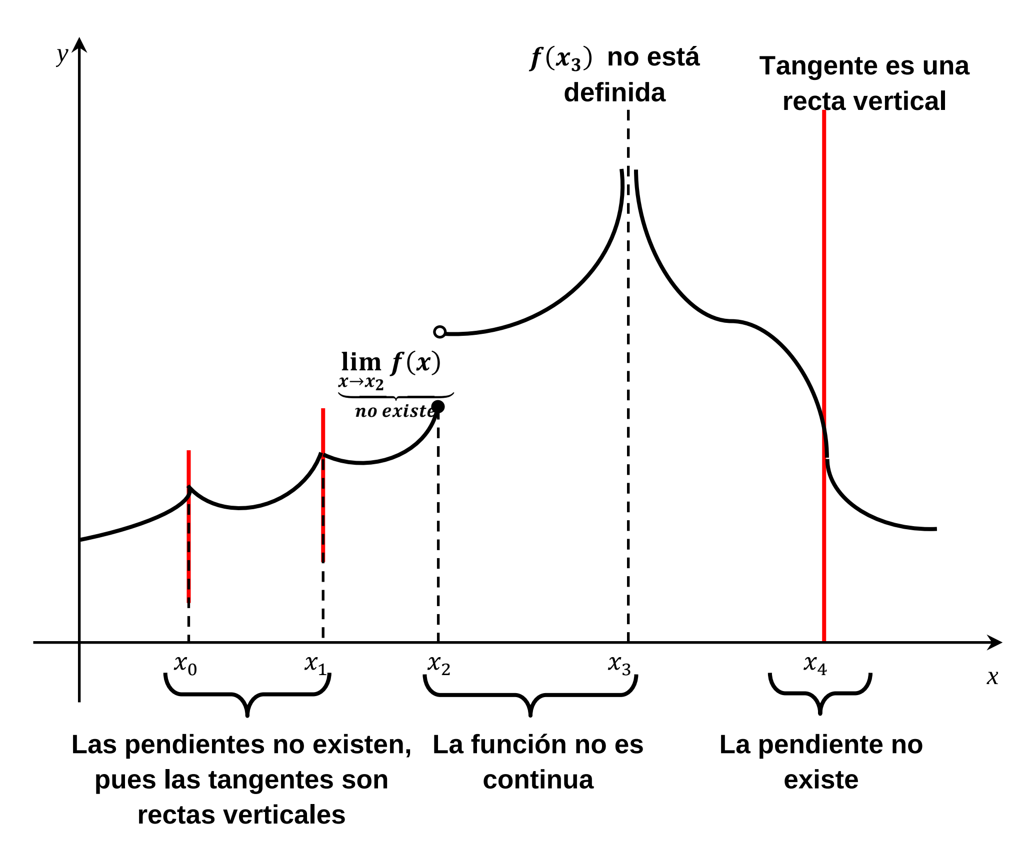
- ✓ Si una **Función** f es **Derivable** en un punto $x = x_0$ **entonces** es **Continua** en $x = x_0$.
- ✓ Si f **No** es **Continua**, entonces **No** es **Derivable**.

Estos resultados significan que la **Derivabilidad** asegura la **Continua** de la **Función**, pero la **Continuidad** **no asegura** la **Derivabilidad**.

Ejemplo: Determinaremos a través del siguiente gráfico la derivabilidad de la función en cada los puntos x_0 , x_1 , x_2 , x_3 y x_4

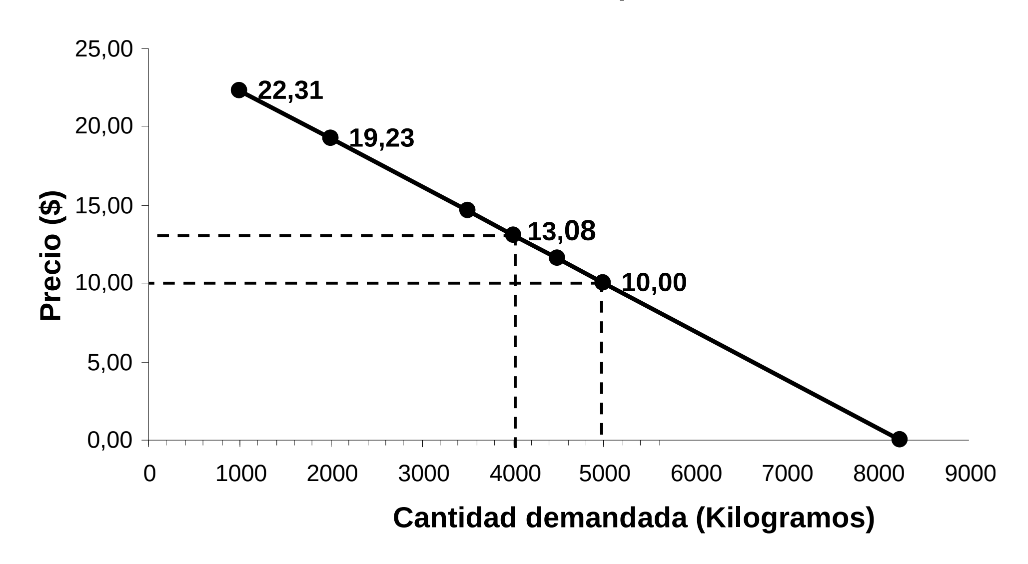


Para ello trazamos las rectas tangentes en cada uno de esos puntos, lo que resulta:



Teniendo en cuenta los conceptos hasta aquí estudiados te proponemos las siguientes actividades cuya finalidad es la de integrar los conceptos aprendidos:

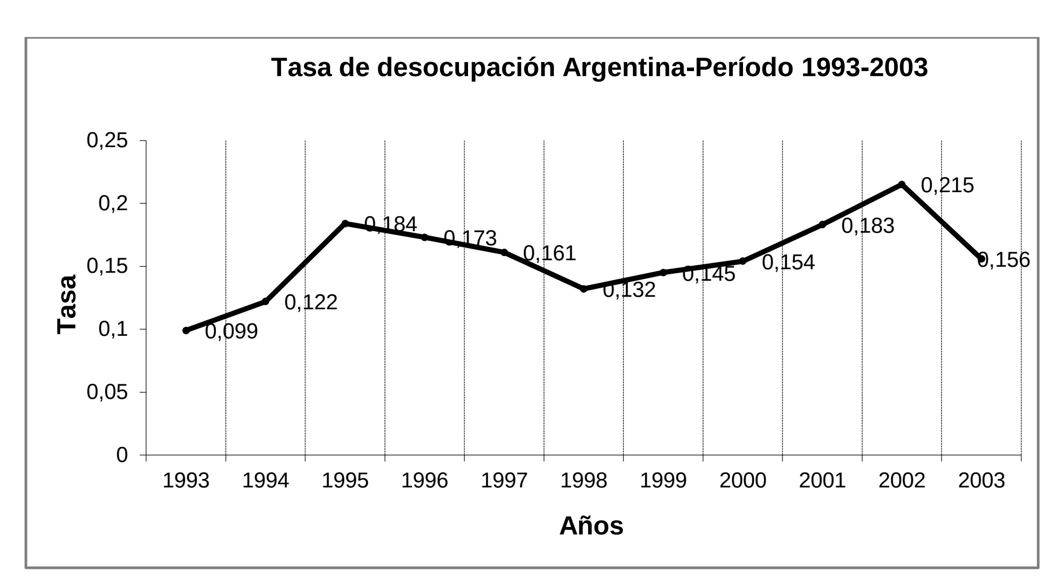
Actividad 1: Si La función de demanda de un cierto producto viene dada por el siguiente gráfico:



a) ¿Cuánto varía el precio, sí la cantidad demanda varía de 4000 a 5000?.

b) ¿Cuánto varía el precio por cada unidad producida, en el mismo intervalo?.

Actividad 2: Teniendo en cuenta los datos que provee el INDEC, la desocupación en Argentina ha variado en el período comprendido entre 1993 a 2003 según lo muestra el siguiente gráfico:



Fuente: INDEC-Elaboración propia.

Se quiere saber:

a) ¿Qué variación se produjo en la tasa de desocupación en el año 2003 con respecto a 1993?.

b) ¿Cuál fue la tasa de variación media de desocupación en Argentina en ese período?, e interprete el valor obtenido

c) ¿Cuál fue la tasa de variación media de desocupación en Argentina desde 1995 a 1998?.

Actividad 3: A través del gráfico de las siguientes funciones analiza si son derivables las siguientes funciones en los puntos que se indica. Justifica tu respuesta.

a) $f(x)=\begin{cases} 1 & \textbf{sí } x>0 \\ -1 & \textbf{sí } x\leq 0 \end{cases}$, ¿es derivable en $x=0$?

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{sí } x\leq 4 \\ -2x+24 & \text{sí } x>4 \end{cases}$, ¿es derivable en $x=4$?

En los apartados anteriores aprendimos que para obtener la Derivada de una Función en un PUNTO, nos vamos Aproximando a la Pendiente de la Recta Tangente mediante pendientes de rectas Secantes. A continuación desarrollaremos

un ejemplo para observar el procedimiento analítico de una función derivada en un punto.

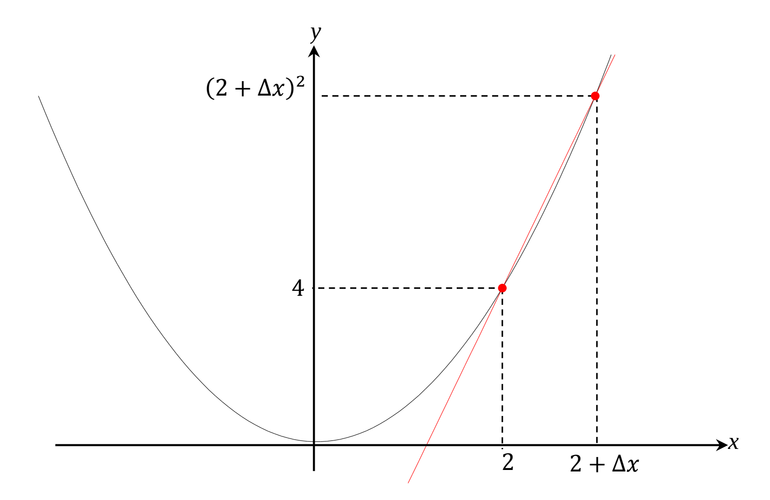
Ejemplo: Hallemos la pendiente de la recta tangente a la función: $f(x) = x^2$, en el punto de coordenadas $(2,4)$.

Recordemos que para hallar la pendiente de una recta necesitamos conocer las coordenadas de dos de sus puntos ya que la pendiente: m se calcula teniendo en cuenta la fórmula estudiada en la Unidad 2:

$$m = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Como en este caso conocemos solo un punto de la **Recta Tangente**, que es justamente el punto de tangencia (2,4), para encontrar su pendiente consideremos un punto próximo de coordenadas: $(2 + \Delta x, (2 + \Delta x)^2)$ que surge de darle a $x = 2$ un incremento Δx.

Gráficamente la situación anterior sería:



Ahora podemos calcular la pendiente de la **Recta Secante** que pasa por los puntos: $(2,4)$ y $(2 + \Delta x, (2 + \Delta x)^2)$ haciendo:

$$\boxed{\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}}} = \frac{\overbrace{(2+\Delta x)^2 - 4}^{Desarrollamos\ el\ cuadrado\ del\ binomio}}{\underbrace{(2+\Delta x) - 2}_{Suprimimos\ los\ paréntesis\ y\ cancelamos}} = \frac{\overbrace{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}^{Cancelamos}}{\Delta x}$$

$$= \underbrace{\frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}_{Distribuimos\ el\ denominador} = \underbrace{\frac{4\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}}_{Simplificamos} = \boxed{\boxed{4 + \Delta x}}$$

Luego la Pendiente de la **Recta Secante** es: $\boxed{\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + \Delta x}}$

Ahora por definición de **Pendiente** de la **Recta Tangente** debemos hacer que Δx tienda cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$$

Este resultado nos dice que en el punto $(2,4)$ la Pendiente de la Recta Tangente es 4 y su interpretación es que la Función en ese Punto está Creciendo a un Ritmo Instantáneo de 4 unidades por cada unidad en que crece la variable independiente.

Si se quiere averiguar el Ritmo Instantáneo de cambio de la misma función en otro punto, el procedimiento se repite considerando otro punto próximo, calculando la Pendiente de la recta Secante para luego llegar a la Pendiente de la recta Tangente tomando límite para cuando el Incremento de la variable x tiende a cero.

Es evidente que el método que hemos seguido hasta ahora para la obtención de la derivada de la función en un punto es poco eficaz, ya que implica que en una misma función deberíamos repetir el procedimiento tantas veces como queramos averiguar el ritmo instantáneo de cambio en distintos puntos.

En el próximo apartado trataremos de mejorarlo, obteniendo una expresión general de la derivada de la función, que nos permita calcular rápidamente los ritmos instantáneos de cambio cualquiera sea el punto de la función que estemos analizando.

Retomemos la función $f(x) = x^2$, y volvamos a utilizar el mismo procedimiento anterior, pero en vez de trabajar con las coordenadas de un punto específico, consideramos un primer punto (x, x^2) y un punto próximo de coordenadas $(x + \Delta x, (x + \Delta x)^2)$.

4.1.4 Cálculo de la Función Derivada.

Reconocemos cuatro pasos para calcular la **Función Derivada**:

1^{er} Paso: dar a x un incremento Δx y calcular la función incrementada:

$$f(x + \Delta x)$$

2^{do} Paso: obtener el incremento absoluto de la función, Δy, efectuando la diferencia entre la función incrementada y la función sin incrementar:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3^{er} Paso: efectuar el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4^{to} Paso: calcular el límite del cociente incremental:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Apliquemos a $f(x) = x^2$ este procedimiento conocido como la regla de los cuatro pasos:

1^{er} Paso: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$

2^{do} Paso: $f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2$

3^{er} Paso: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{x + \Delta x - x}$ $\Rightarrow$desarrollamos el cuadrado del binomio

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$ $\Rightarrow$cancelamos en el numerador y denominador

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$$ ⇒distribuimos denominador y simplificamos.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$ ⇒obtuvimos la **Pendiente** de la **Recta Secante**.

4to Paso: Calculamos el límite del cociente anterior.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x = f'(x)$$

El resultado al que arribamos es una fórmula que nos permitirá Calcular las Pendientes de las Rectas Tangentes a la curva en cualquier punto, con solo sustituir al valor de x.

Por ejemplo, Para conocer la Razón Instantánea de cambio de la Función $f(x) = x^2$ en $x = 10$, simplemente se reemplaza en la fórmula $f'(x) = 2x$ x por 10:

$$\boxed{f'(10) = 2 \cdot 10 = 20}$$ ⟹ Esto nos informa que cuando $x = 10$, la **Función** está **Creciendo** a un **Ritmo Instantáneo** de 20 unidades por cada unidad en que **Crece** la variable independiente

Averigüemos ahora la Variación Instantánea cuando $x = -5$

$$\boxed{f'(-5) = 2 \cdot (-5) = -10}$$

En este caso la Función Decrece a un Ritmo Instantáneo de 10 unidades por cada unidad en que Crece la variable independiente.

De este modo la expresión $\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x}$ es la **Función Derivada** de $\boxed{y = x^2}$

Definición

La **Función Derivada** de una función $f(x)$ es otra **Función** a la que llamamos $\boxed{f'(x)}$ y la definimos como:

Se lee "f prima de x" ←
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

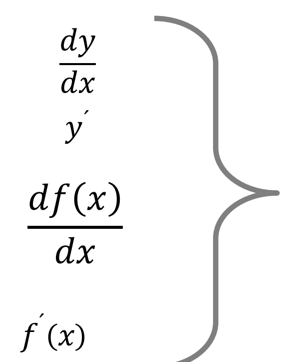
Los pasos que hemos desarrollado para obtener $f'(x)$ podemos repetirlos para cualquier función y calcular así su función derivada.

Sin embargo el procedimiento sigue siendo engorroso, por lo que usualmente para el cálculo de las derivadas utilizaremos Reglas de Derivación, también llamadas Técnicas de Diferenciación que posibilitan obtener las funciones derivadas en forma sencilla y rápida.

Las reglas se enuncian sin demostración y establecen cómo se obtienen las funciones derivadas según el tipo de función que queramos "derivar"

4.2. Técnicas de Diferenciación.

La **Derivada** de la función $f(x)$ puede **Denotarse** por cualquiera de las siguientes formas:



se leen "**Derivada** de f con **Respecto** a x"

Regla de la **Constante**:

Si $f(x) = k$, donde k es cualquier número real, entonces:

$$f'(x) = 0$$

La **Derivada** de una **Función Constante** es **CERO**

A pesar que no incluimos demostraciones este caso es fácil de deducir ya que una Función Constante gráficamente es una recta horizontal por lo que las **Rectas Tangentes** trazadas para cualquiera valor de x coinciden con la recta horizontal que representa a la función y siempre su **Pendiente** será **Nula** como vimos en la Unidad 2:

jemplo:

Sea $f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$

Regla de la **Variable**:

Si $f(x) = x$, entonces:

$$f'(x) = 1$$

La **Derivada** de la **Variable** es **UNO**

Este caso también es fácil de deducir ya que gráficamente la función $f(x) = x$ es la recta bisectriz orientada del Primer al Tercer Cuadrante y las **Rectas Tangentes** en cualquier punto coincide con dicha recta y su **Pendiente** es **Uno**:

Ejemplo:

Sea $f(z) = z \Rightarrow f'(z) = 1$

Regla de la **Función Potencia**:

Si $f(x) = x^n$ para cualquier n número real distinto de cero, entonces la derivada es:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

La **Derivada** de $f(x) = x^n$ es el exponente n multiplicada por la **Función** cuyo exponente está disminuido en 1

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

Regla de **Constante** por **Función**:

Sea k un número real. Si $g'(x)$ existe, entonces la derivada de $f(x) = k \cdot g(x)$ es:

$$f'(x) = k \cdot g'(x)$$

La **Derivada** de la una constante por una función es la **Constante** multiplicada por la **Derivada** de la **Función**

Ejemplo:

Sea $f(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$

Regla de la **Raíz Cuadrada**:

Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La **Derivada** de una **Raíz Cuadrada** es igual a 1 sobre dos veces la raíz cuadrada de x

Regla de la **Raíz enésima**:

Si $f(x) = \sqrt[n]{x}$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

La **Derivada** de una **Raíz enésima** es igual a 1 sobre n veces la raíz enésima de x elevada a $n-1$

Ejemplo:

Sea $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

Otra **VARIANTE** de la regla de derivación de la **RAÍZ ENÉSIMA** es transformar la raíz a **EXPONENTE FRACCIONARIO** y luego aplicar la regla de la derivada de la potencia.

Tomemos nuevamente el ejemplo anterior:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \underbrace{=}_{transformamos} x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

Regla de $\frac{1}{x}$:

Si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

La **Derivada** de uno sobre x es igual a menos uno sobre x elevado al cuadrado

Regla de la **Función Exponencial**:

Si $f(x) = b^x$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = b^x \cdot \ln b$$

La **Derivada** de la función exponencial es igual a la función exponencial multiplicada por el logaritmo natural de la base de la exponencial

Ejemplo:

Sea $f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot ln3$

Un caso particular de **Función Exponencial** es el caso: $\boxed{e^x}$

Al aplicar la regla de derivación anterior a e^x, nos queda que la **Derivada** es:

$$\boxed{f'(x)} = e^x \cdot \underbrace{lne}_{1} = \boxed{e^x}$$

$$f'(x) = e^x$$

La **Derivada** de e^x es la misma función e^x

Regla de la **Función Logaritmo**:

Si $f(x) = \log_b x$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_b e$$

La **Derivada** de la función logaritmo es igual a uno sobre x por el logaritmo en base b del número e

Ejemplo:

Sea $f(x) = \log_2 x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_2 e$

Un caso particular de **Función Logarítmica** es el caso del logaritmo natural: $\boxed{\ln x}$

Al aplicar la regla de derivación anterior a $\ln x$, nos queda que la **Derivada** es:

$$\boxed{f'(x)} = \frac{1}{x} \cdot \log_e e = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = \boxed{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

Regla de la Función Seno:

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = \cos x$$

La **Derivada** de seno de x es igual al coseno de x

Regla de la Función Coseno:

Si $f(x) = \cos x$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

La **Derivada** de coseno de x es igual a menos el seno de x

Regla de la Función Tangente:

Si $f(x) = \operatorname{tg} x$, entonces su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

La **Derivada** de la tangente de x es igual a uno sobre coseno cuadrado de x.

Regla de la **Suma** de **Funciones**:

Si f y g son dos funciones derivables en x, entonces:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

La **Derivada** de una suma, es la suma de las derivadas.

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

La **Derivada** de una diferencia, es la diferencia de las derivadas.

Regla del **Producto** de **Funciones**:

Si f y g son dos funciones derivables en x, entonces:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

La **Derivada** de un producto, es la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primero sin derivar por la derivada del segundo

Regla del **Cociente** de **Funciones**:

Si f y g son dos funciones derivables en x, entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

La **Derivada** de un cociente, es la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, divido el denominador al cuadrado

Antes de continuar con reglas de derivación te proponemos el siguiente ejemplo de modo de integrar las reglas vistas hasta aquí.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = \frac{x^2+\cos x}{\sqrt{x}}$. Hallar la función derivada

$$f'(x) = \frac{\left(\overbrace{[2x + (-\operatorname{sen} x)]}^{\substack{Aplicamos\\ las\ reglas\ de:\\ la\ suma, potencia\ y\ coseno}} \cdot (\sqrt{x})\right) - \left((x^2+\cos x)\cdot \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\substack{Aplicamos\\ la\ regla\\ de\ la\ raíz}}\right)}{(\sqrt{x})^2}$$

4.2.1. Regla de la Cadena.

Las reglas de derivación vistas hasta ahora nos permiten hallar la función derivada a funciones simples. Pero frecuentemente las funciones a derivar son funciones compuestas del tipo:

$y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, $y = \log_2(x^3)$; $y = 5^{\cos x^2}$. Para este tipo de funciones existe una regla muy importante conocida con el nombre de:

Regla de la Cadena:

Antes de formalizar dicha regla desarrollaremos un ejemplo.

Tomemos como ejemplo a la función: $y = \sqrt{4^x}$ y tratemos de hallar su función derivada.

Observemos que la función $y = \sqrt{4^x}$ indica que debemos extraer la raíz cuadrada pero no del valor que le demos a x (como sería calcular $\sqrt{x}$), sino del resultado de calcular 4^x

Es decir si por a x le damos los siguientes valores obtendríamos una tabla como la siguiente:

x	4^x	$\sqrt{4^x}$
0	1	$\sqrt{1} = 1$
2	16	$\sqrt{16} = 4$
⋮	⋮	⋮

Es decir que aparece una función "intermedia" 4^x de donde podríamos llamarla: $g(x) = 4^x$.

Entonces la función original quedaría: $y = \sqrt{g(x)}$ y así derivar y respecto de x ($\frac{dy}{dx}$) a través de la regla de la cadena consiste en:

1º. Aplicar la regla de derivación a la operación principal. En este caso la raíz cuadrada:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}$ ···advierte que en el radicando no aparece x sino la función intermedia $g(x) = 4^x$

2º. Multiplicar a la expresión anterior por la derivada de la función intermedia: $g'(x)$

Estos dos pasos nos llevan a la función derivada, que es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$$

Ahora reemplazamos $g(x)$ y su derivada $g'(x)$ por sus respectivas expresiones, de modo que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{4^x}} \cdot 4^x \cdot \ln 4$$

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo: Sea $y = \log_2 x^3$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$y = \log_2 x^3 \Longrightarrow$$

Primer paso: La Función principal es: log_2 (logaritmo en base 2). Entonces debemos aplicar la regla del logaritmo pero ahora sobre x^3. Es decir que tenemos una función $g(x) = x^3$

Segundo paso: Después de aplicar la regla del logaritmo deberemos multiplicar por la derivada de x^3

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\frac{1}{x^3} \cdot \log_2 e}^{Derivada\ del\ logaritmo} \cdot \overbrace{(3x^2)}^{Derivada\ de\ la\ potencia}$$

Formalizando la **Regla** de la **Cadena** queda:

Si tenemos una función y que admite derivada con respecto a x y que es la composición de dos funciones, o sea que $y = f(g(x))$. Entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Si tenemos una función y que admite derivada con respecto a x y que es la composición de tres funciones, o sea que $y = f\left(g(h(x))\right)$. Entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(g(h(x))\right)\right) = f'\left(g(h(x))\right) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Y así sucesivamente

En la práctica cuando se deba derivar funciones compuestas no es necesario expresarlas en función de variables intermedias, sino que simplemente se identifica la operación principal y se aplica la regla correspondiente, luego se **multiplica** el resultado por la derivada de la función simple y así sucesivamente en el caso de que existan más funciones simples.

Ejemplo: Sea $y = 5^{\cos x^2}$, hallar la $\frac{dy}{dx}$.

Lo primero que hacemos es identificar la función principal. En este caso es una función exponencial: $5^{g(h(x))}$, luego la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{5^{\cos x^2} \cdot \ln 5}_{\text{Derivada de la exponencial}} \cdot \overbrace{(-\operatorname{sen} x^2)}^{\text{Derivada del coseno}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{Derivada de la potencia}}$$

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 5: Hallar la derivada de $f(x) = -2x^2 + 2x$, en el punto $x = \frac{1}{2}$ y explica su significado.

Actividad 6: Hallar la función derivada primera de f, aplicando las reglas de derivación.

a) $f(x) = x^4 + 1$

b) $f(x) = 3x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{x}$

e) $f(x) = x^5\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

f) $f(x) = \frac{x^6 + 1}{x}$

g) $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$

h) $f(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$

i) $f(x) = e^{x^7 + 1}$

j) $f(x) = sen\left(x^3 + 1\right)$

k) $f(x) = x^2\left(2^x - \frac{1}{x^5}\right)$

l) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{1 + x^2}$

ll) $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)$

m) $f(x) = 2^{x^8} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}} + \sqrt{5}$

n) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - 3x}$

ñ) $f(x) = tg(1 - ln\,x)$

o) $f(x) = sen(ln\,x)$

Actividad 7: Hallar la función derivada primera de f, aplicando las reglas de derivación

a) $f(p) = 2x + \sqrt{p}$

b) $f(r) = r^{\frac{2}{3}} - r + \frac{1}{3}r^{6}$

c) $f(x) = a^{2z}e^{2x}x$

d) $f(t) = \dfrac{x \cdot \sqrt{t} + x}{t - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt{t} + x}{t - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{5bx}{1 + \sqrt{x}}$

g) $f(t) = log\left(\dfrac{2}{x}\right) + e^{-1} cos\, 2t$

Veremos seguidamente un caso especial que se presenta cuando aparentemente no podemos aplicar las reglas de derivación que vimos precedentemente.

4.2.2. Derivación Logarítmica.

Cuando tengamos que derivar funciones compuestas del tipo $f(x) = g(x)^{h(x)}$ donde la **Variable Independiente** aparece en la **Base** y en el **Exponente** de la **Potencia**, ¿qué regla usamos para obtener la función derivada?. En este caso no podemos utilizar ni la regla de x^n ni de la b^x , pues la variable se encuentra tanto en la base como en el exponente.

La forma de proceder en este tipo de funciones consiste en aplicar los siguientes pasos:

Dada $\boxed{f(x) = g(x)^{h(x)}}$ su **Derivada** se obtiene aplicando el siguiente procedimiento

1er Paso: Aplicamos logaritmo natural a ambos miembros de la igualdad:

$$\ln f(x) = \ln g(x)^{h(x)}$$

2do Paso: Aplicamos propiedad de logaritmo en el segundo miembro, que dice que el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\ln f(x) = h(x) \cdot (\ln g(x))$$

3er Paso: Ahora derivamos a ambos miembros de la igualdad:

$$[\ln f(x)]' = [h(x) \cdot (\ln g(x))]'$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

4to Paso: Por último despejamos $f'(x)$ del primer miembro que es lo que queremos obtener:

$$\boxed{f'(x) = \left(h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\right) \cdot f(x)}$$

Observación:

En Análisis Matemático I, en las actividades prácticas en las que debes aplicar la derivación logarítmica, debes realizar los cuatro pasos para hallar la derivada como te mostramos en el siguiente ejemplo

Ejemplo: Supongamos que queremos hallar la función derivada de $y = x^{\operatorname{sen} x}$

1^er Paso: $\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x}$

2^do Paso: $\ln y = (\operatorname{sen} x) \cdot (\ln x)$

3^er Paso: $[\ln y]' = [(\operatorname{sen} x) \cdot (\ln x)]'$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x) \cdot (\ln x) + (\operatorname{sen} x) \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot 1\right)$$

4^to Paso: $y' = \left((\cos x) \cdot (\ln x) + (\operatorname{sen} x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot y$, reemplazando y por la función obtenemos la **Derivada** de la **Función**: $y = x^{\operatorname{sen} x}$

$$\boxed{y' = \left((\cos x) \cdot (\ln x) + (\operatorname{sen} x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot x^{\operatorname{sen} x}}$$

Ejemplo: Supongamos que queremos hallar la función derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{sen\, z}} \log[(3 \cdot \cos x)^{-x}]$

En este caso antes de poder aplicar Derivación logarítmica debemos aplicar otras reglas como la de constante por función.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{sen\, z}} \left(\frac{1}{(3 \cdot \cos x)^{-x}}\right) \cdot \log e \cdot \left(-1 \cdot \ln(3 \cdot \cos x) + (-x)\frac{1}{3 \cdot \cos x}(-sen\, x)\right) \cdot (3 \cdot \cos x)^{-x}$$

Cálculo Auxiliar

$z = (3 \cdot \cos x)^{-x}$

$\ln z = \ln(3 \cdot \cos x)^{-x}$

$\ln z = -x \cdot \ln(3 \cdot \cos x)$

$$\frac{z}{z'} = -1 \cdot \ln(3 \cdot \cos x) + (-x)\frac{1}{3 \cdot \cos x}(-sen\, x)$$

$$z' = \left(-1 \cdot \ln(3 \cdot \cos x) + (-x)\frac{1}{3 \cdot \cos x}(-sen\, x)\right) \cdot (3 \cdot \cos x)^{-x}$$

Actividad 8: Utilizando el procedimiento de derivación logarítmica, obtener las funciones derivadas de:

a) $f(x)=(2x)^{x}$

b) $f(x)=(x+1)^{e^{x}}$

c) $f(x)=x^{senx}+e^{x}$

d) $f(x)=(ln\,x)^{2x}(x^{3}+4)$

Actividad 9: Calcula la función derivada con respecto a x, de la siguiente función

a) $f(x)=\sqrt{(sen\ x)^{x}}$

b) $f(x)=ln\,x^{x}+\sqrt{x^{2}+5}$

c) $f(x)=(sen\ z)^{x^{2}}$

d) $f(x)=(\cos x)^{x}+5x^{8}$

4.3. Análisis Marginal en Economía-Aplicaciones.

El Análisis Marginal estudia el aporte de cada producto, servicio o cliente a los rendimientos de la Empresa. Nos permite contestar preguntas como: ¿A partir de qué volumen mínimo de ventas conviene lanzar un nuevo producto?, ¿Conviene dejar de producir un determinado producto ya existente?, o ¿Cuál es el precio mínimo que debería cobrar por una unidad adicional de un producto?, más aún ¿Qué efecto tiene en las utilidades un corrimiento de la demanda entre producto?. Es decir, que el Análisis Marginal analiza cómo los Costos y Beneficios Cambian en respuesta a los Cambios Incrementales en las acciones. El eje central en el análisis marginal es si los beneficios esperados de la acción superan el costo adicional.

En términos matemáticos el Análisis Marginal se interesa por estudiar el comportamiento de la variable dependiente y cuando cambia la variable independiente x; en particular, en Economía es importante el Cambio de la variable Dependiente $\boxed{y}$ por CADA UNIDAD ADICIONAL de la variable Independiente $\boxed{x}$. Este cambio en Matemática lo mide la Derivada de la Función que estamos analizando.

Este interés de las Ciencias Económicas por los Cambios Marginales lo podemos comprender si consideramos una función de costos de una empresa que produce un único bien.

Ejemplo: Supongamos que la relación entre el costo (C) y las unidades producidas (q) está dada por la ecuación:

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 10$$

Si cuando se producen 50 unidades queremos calcular en cuánto se **Incrementaría** el costo si agregamos **UNA UNIDAD** a la producción (llevándola a 51 unidades), es posible:

a) Calcular el **Incremento Real** del **Costo**, haciendo:

$$\boxed{C(51) - C(50)}$$

$$C(51) - C(50) = 8068 - 7760 = \mathbf{308}$$

ó

b) Aproximar el incremento del costo, utilizando el **Costo Marginal** es decir la **Derivada** del Costo:

$$\boxed{C_{mag} = C^{\prime}(q) = 6q + 5}$$

$$C^{\prime}(50) = 6 \cdot 50 + 5 = \mathbf{305}$$

Debido a la semejanza de las respuestas y a la facilidad del cálculo del Costo Marginal, generalmente se lo usa para APROXIMAR el Costo Real de producción de una unidad adicional.

Interpretación Económica de la función marginal, en este caso particular: el Costo Marginal es una BUENA APROXIMACIÓN del incremento que se produce en el Costo al producir una UNIDAD ADICIONAL.

Atención:

No confundir el costo de 50 unidades producidas con el costo real de producir la unidad número 50. Es decir, $\boxed{C(50) = 7760}$ mide cuanto nos cuesta producir el total de las 50 unidades. En cambio: $\boxed{C(51) - C(50) = 308}$ nos mide cuanto nos cuesta producir la unidad número 51.

Con el mismo razonamiento en economía se habla entre otros conceptos de:

BENEFICIO MARGINAL :

es la Derivada de la Función Beneficio. Cuya Interpretación Económica es. Una BUENA APROXIMACIÓN al beneficio real de PRODUCIR una Unidad Adicional.

INGRESO MARGINAL :

es la Derivada de la Función Ingreso. Cuya Interpretación Económica es. Una BUENA APROXIMACIÓN al ingreso real de PRODUCIR una Unidad Adicional.

Antes de reforzar estos conceptos aprendidos realicemos un resumen sobre las razones de cambio que estudiamos hasta acá:

Resumen:

La razón de **Cambio Medio** o **T.V.M** $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ que mide el **PROMEDIO** de **VARIACIÓN** en un intervalo.

La razón de **Cambio Instantánea** = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ que mide la **VARIACIÓN INSTANTÁNEA** en un punto.

Estas dos razones nos brindan una medida de cómo cambia una cantidad frente a otra. Pero ese cambio depende de la situación en que nos encontramos. Por ejemplo, no es lo mismo que en un año una población cambie en 500 habitantes si la población es de 500.000 que si es de 5 millones de personas. En estos casos cuando estamos interesados en el cambio producido relacionado con el tamaño de la magnitud o cantidad que estamos estudiando, recurrimos a la razón llamada:

4.3.1. Razón Porcentual de cambio.

Tanto la Razón Media como la Razón Instantánea nos brindan una MEDIDA de cómo Cambia una cantidad frente a otra. Pero ese cambio depende de la situación en que nos encontramos. Por ejemplo, no es lo mismo que en un año una población cambie en 500.000 habitantes si la población es de 50.000.000 que si es de 2.500.000. En estos casos cuando estamos interesados en el Cambio producido relacionado con el Tamaño de la magnitud o cantidad que estamos estudiando, recurrimos a la:

Razón Porcentual de Cambio:

Se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$100 \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Y mide mejor situaciones como las anteriores

Observemos que en el ejemplo con que introducimos el tema, el cambio porcentual para la población de 50.000.000 es de $100 \cdot \frac{500.000}{50.000.000} = 1\%$, mientras que para la de 2 millón es de $100 \cdot \frac{500.000}{2.500.000} = 20\%$

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo: El producto bruto interno (PBI) de un cierto país es aproximado por: $P(t) = t^2 + 5t + 100$ mil millones de u.m (unidades monetarias) t años después de 1990. Se desea saber:

a) El ritmo al que estaba cambiando el PBI en 1995

b) La razón porcentual de cambio PBI en 1995.

a) El ritmo al que estaba cambiando el PBI está dado por la derivada de la función: $P'(t) = 2t + 5$. Luego el ritmo de cambio del PBI en 1995, es la derivada de la función evaluada en 5, ya que t=5 años después de 1990 es el año 1995:

$$P'(5) = 2 \cdot 5 + 5 = 15 \text{ mil millones de u.m}$$

b) La razón porcentual de cambio PBI en 1995 es estimada en:

$$100\frac{P'(5)}{P(5)} = 100.\frac{15}{150} = 10\% \quad por \;\; año$$

Otra razón porcentual o proporcional de cambio que es usada para evaluar cambios relativos en la función ante cambios relativos en la variable independiente, en economía se denomina ***elasticidad.***

4.4. Elasticidad de Funciones Económicas.

En Ciencias Económicas el concepto de Elasticidad proviene de la física y es introducido por Alfred Marschall (economista Inglés). La Elasticidad es equivalente a lo que intuitivamente entendemos como la Elasticidad de una cuerda o una pelota. Por ejemplo si arrojamos una pelota de frontón sobre una pared, su rebote llega más lejos que desde donde la lanzamos, ya que tal pelota es muy Elástica. En cambio, si la pelota fuera de squash apenas rebotaría en la pared, debido a que es muy Rígida.

Esto mismo ocurre por ejemplo en las curvas de Demanda estudiadas en la Unidad 2. Cuando el efecto de un Cambio en el Precio sobre la cantidad

Demandada es muy grande decimos que la curva de demanda es Elástica. Decimos que es rígida cuando el efecto es pequeño.
Es decir que la Elasticidad MIDE la Intensidad de una relación entre Variables Económicas. Expresa la variación de una variable cuando se produce un cambio en otra variable.

Elasticidad:

La Elasticidad de una Función respecto a una variable es una MEDIDA de la Sensibilidad o intensidad de Repuesta de una Función a Cambios en el valor de la Variable Independiente.
Desde un punto de vista MATEMÁTICO la Elasticidad que se denota con la letra griega eta: $\boxed{\eta}$ es un Número Real que refleja qué Incremento Porcentual de la Función tendremos si se produce un Incremento Porcentual en la Variable Independiente, que controla o determina parcialmente el nivel de la función.

En Símbolos:

$$\frac{\Delta y}{y}\cdot 100 \approx \eta \cdot \frac{\Delta x}{x}\cdot 100$$

Despejando $\boldsymbol{\eta}$, la elasticidad es aproximadamente igual a:

$$\eta \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}\cdot 100}{\frac{\Delta x}{x}\cdot 100} = \frac{cambio\ porcentual\ de\ la\ función}{cambio\ porcentual\ de\ la\ variable\ independiente}$$

$$\eta \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \boxed{\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad (1)$$

Esta elasticidad recibe el nombre de **Elasticidad Arco** corresponde a la **Elasticidad** de una **Función** entre **DOS PUNTOS**.

Pero en realidad la importancia de la **Elasticidad** se encuentra en el campo de las **Predicciones**. Cuando una **Variable** cambia en cierto **Porcentaje** “pequeño”, la **Función** lo hará en otro **Porcentaje**. Luego, si hacemos tender el incremento de la variable independiente a cero ($\Delta x \to 0$) la expresión (1) queda:

$$\eta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Y así obtenemos que la **Elasticidad** correspondiente a un punto de una **Función** viene dada por la fórmula:

$$\boxed{\eta = \frac{x}{y} \cdot f^{\prime}(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

En Ciencias Económicas lo que interesa más frecuentemente es el **valor absoluto** de la **Elasticidad**. A continuación se exponen los tipos de **Elasticidades** más importantes:

$\boxed{|\eta| = 1}$: En este caso, se dice que la Función tiene Elasticidad Unitaria. Aquí el Porcentaje en que varía la Función es IGUAL al Porcentaje en que varía la Variable.

$\boxed{|\eta| < 1}$: Si la Elasticidad se encuentra entre 0 y 1 se dice que la función es Inelástica. El Porcentaje en que cambia la Función es MENOR que el Porcentaje en que cambia la Variable.

$\boxed{|\eta| > 1}$: En este caso, la Función es considerada Elástica. El Porcentaje en que cambia la Función es MAYOR que el Porcentaje en que cambia la Variable.

$\boxed{|\eta| \; tiende \; a \; infinito}$: Una Función con esta Elasticidad se la considera Perfectamente Elástica. Cualquier cambio por **diminuto** que fuera en la Variable tiende a generar **altísimos cambios** en la Función.

$\boxed{\eta = 0}$: Cuando la Elasticidad es CERO se dice que la Función es Perfectamente Inelástica, es decir que un cambio en la variable **no genera ninguna respuesta** en la función.

La Elasticidad se puede calcular en cualquier Función diferenciable o Derivable, sin embargo en la teoría económica se la considera principalmente para las funciones de Demanda, Oferta, Precio, Costo e Ingreso.

El uso más frecuente de la elasticidad en economía es la "ELASTICIDAD DE DEMANDA" que mide la forma en que un Cambio en el Precio de un producto **afecta** la cantidad que se Demanda. Es decir que se refiere a la **respuesta de los consumidores ante cambios en los precios**. Por ejemplo, si para un aumento de precio de un 5% la cantidad demandada disminuyera un 2%, en términos poco rigurosos se diría que la elasticidad de demanda es -2/5.

Desarrollaremos un ejemplo para ilustrar el concepto de elasticidad.

Ejemplo: La demanda de bebidas destiladas está dada por: $q = -0{,}00375p + 7{,}87$, donde p es el precio al menudeo (en dólares) de una caja de licor y q es el número promedio de cajas compradas por año por un consumidor.

a) Calcula e interpreta la elasticidad de la demanda cuando $p = \$118$ por caja y cuando $p = \$\,1200$ por caja.

b) Determine el precio por caja para el que la demanda tendrá elasticidad unitaria (es decir $|\eta| = 1$) ¿Cuál es el significado de este precio?.

a) Como $q = -0{,}00375p + 7{,}87$ tenemos que $q' = -0{,}00375$ por lo que:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{-0{,}00375p + 7{,}87}(-0{,}00375) = \frac{-0{,}00375 \quad p}{-0{,}00375 \quad p + 7{,}87}$$

Hacemos $p = 118$ y obtenemos:

$$\eta|_{p=118} = \frac{-0{,}00375\ (118)}{-0{,}00375(118)+7{,}87} = -0{,}06$$

Como $|-0{,}06| < 1$, estamos en el caso $|\boldsymbol{\eta}| < 1$, en el que la demanda es **INELÁSTICA** y un cambio porcentual en el precio resultará en un cambio porcentual **MENOR** en la demanda.

Por ejemplo, un incremento del 10% en el precio causará un pequeño decremento de $0{,}6\%$ en la demanda.

Veamos el caso en que el precio $p = \$1200$ por caja

Si $p = 1200$, entonces $\eta = \frac{-0{,}00375\ (1200)}{-0{,}00375(1200)+7{,}87} = -1{,}34$

Como $|-1{,}34| > 1$, la demanda es **ELÁSTICA**. En este punto un incremento porcentual en el precio resultará en un decremento porcentual **MAYOR** en la demanda.

Aquí un incremento del 10% en el precio ocasionará un decremento del $13{,}4\%$ en la demanda.

b) Determine el precio por caja para el que la demanda tendrá elasticidad unitaria (es decir $|\eta| = 1$) ¿Cuál es el significado de este precio?.

La demanda tendrá **Elasticidad UNITARIA** en el precio p que hace $|\eta| = 1$, pero como se sabe que la demanda siempre es negativa debemos resolver la siguiente ecuación:

$$\eta = \frac{-0{,}00375\, p}{-0{,}00375\, p + 7{,}87} = -1$$

$$0{,}00375p = -0{,}00375p + 7{,}87$$

$$0{,}0075p = 7{,}87$$

$p = 1049{,}33$

La demanda tendrá **Elasticidad UNITARIA** a un precio de $ 1049,33 por caja. A este precio los cambios porcentuales en precio y demanda son aproximadamente los mismos.

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 9: Si el costo en miles de dólares de producir x toneladas de trigo está dado por: $C(x) = 5000 + 20x + 10\sqrt{x}$. Obtiene e interpreta el costo marginal para $x = 25$.

Actividad 10: Sí la función de producción de un producto en una cierta industria es: $f(x) = -2x^3 + 36x^2 + 270x + 5$, donde x es la cantidad de trabajo halla la expresión de la productividad marginal e interpreta el resultado para cuando $x = 2$.

Actividad 11: Sí la función ingresos $R(x) = 6x - \frac{x^2}{1000}$, donde x es el numero de artículos producidos, hallar:

a) El número de artículos en donde el ingreso marginal se anula.
b) La elasticidad del ingreso cuando el número de artículos producidos es de $x = 20$.

Actividad 12: Sí la función de demanda de un consumidor es: $q = D(p) = 20000 - 2p$, calcula:

a) La elasticidad del precio de la demanda para un precio $p = \$2000$, clasifícala y explica el significado del resultado.
b) La elasticidad del precio de la demanda para un precio $p = \$8000$, clasifícala y explica el significado del resultado.
c) La elasticidad del precio de la demanda para un precio $p = \$5000$, clasifícala y explica el significado del resultado.

REGLAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UNA SUMA y DERIVADA DE UNA RESTA:

$h(x) = f(x) + g(x) \rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$

$h(x) = f(x) - g(x) \rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x)$

DERIVADA DE UN PRODUCTO:

$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

DERIVADA DE UN COCIENTE:

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

REGLA DE LA CADENA: DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DE FUNCIÓN

$$y = f[g(x)] \rightarrow y' = f'[g(x)].g'(x)$$

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = k, \quad k\ constante$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = k.x$	$y' = k.1$	$y = k.g(x)$	$y' = k.g'(x)$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = [g(x)]^n$	$y' = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{g(x)}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}.g'(x)$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{g(x)}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{[g(x)]^{n-1}}}.g'(x)$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	$y = \frac{1}{g(x)}$	$y' = \frac{-1}{[g(x)]^2}.g'(x)$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^{g(x)}$	$y' = a^{g(x)}.lna.g'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{g(x)}$	$y' = e^{g(x)}.g'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \log_a g(x)$	$y' = \frac{1}{g(x)}.\log_a e.\ g'(x)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln g(x)$	$y' = \frac{1}{g(x)}.g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = sen[g(x)]$	$y' = cos[g(x)].g'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos[g(x)]$	$y' = -sen[g(x)].g'(x)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tg\ [g(x)]$	$y' = \frac{1}{cos^2[g(x)]}.g'(x)$

UNIDAD V:

Aplicaciones de la Derivada-

Esbozo de Curvas

Índice

Unidad V: Aplicaciones de la Derivada- Esbozo de Curvas

Unidad V

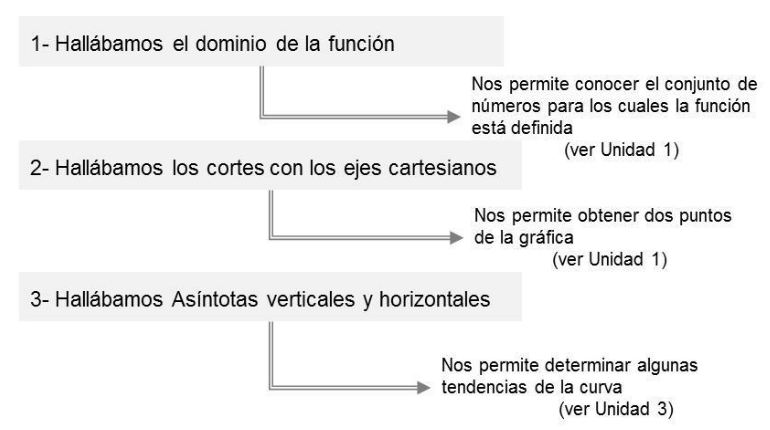
En la unidad 4 hemos aprendido que **Geométricamente** la **Derivada** de una **Función** en un **Punto** es la **Pendiente** de la **Recta Tangente** en ese **Punto**. Reflexionamos que un aspecto importante de esta definición es que la pendiente o inclinación de la recta tangente a la curva en un punto representa el **ritmo de Cambio Instantáneo**. Así, concluimos que cuanto mayor es la inclinación de la recta tangente en un punto, mayor es la rapidez de cambio del valor de la función en las proximidades del punto. Estos aspectos resultaron fundamentales en problemas de las Ciencias Económicas, como son el ingreso marginal y el costo marginal.

En esta unidad que se ubica dentro del bloque temático: **Cálculo Diferencial**, discutiremos con mayor profundidad estos temas, estudiaremos que las tangentes a una curva son útiles para analizar dónde **Crece**, dónde **Decrece** y dónde se sitúan los valores **Máximos** y **Mínimos** de una **Función**.

Además, nos introduciremos al concepto de **Derivada Segunda** de una función (derivada de la derivada), el cual nos permitirá identificar qué tipo de **Concavidad** presenta la función, a los efectos de saber si **el ritmo** de **Cambio** se mantiene, aumenta o disminuye.

Todos los aspectos anteriores resultan fundamentales para trazar las **Gráficas** de **Funciones** de una manera más ajustada que en las unidades anteriores.

Hasta aquí cuando queríamos graficar una función procedíamos de la siguiente manera:

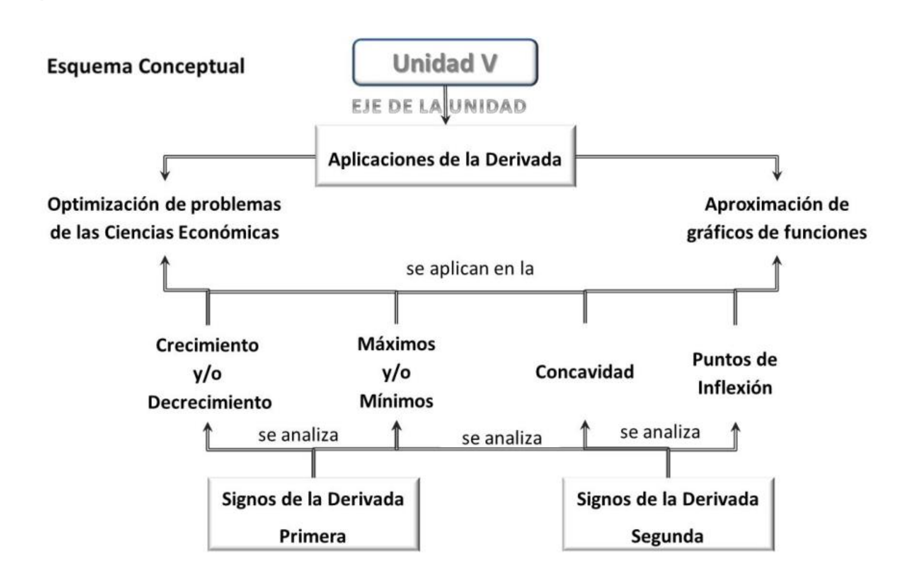


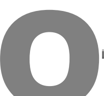
Si bien los elementos de un gráfico vistos hasta ahora nos determinan puntos muy importantes de la gráfica, estos no son suficientes. En esta unidad se darán otros elementos que son necesarios para poder determinar la forma y el comportamiento más ajustado de su gráfica.

En cuanto a algunos de los conocimientos matemáticos previos que se requieren para transitar con éxito esta unidad, son: un manejo fluido de operaciones algebraicas, dominio de funciones y reglas de derivación.

Transversalmente a cada tema de esta unidad, comprenderemos la relación que se establece entre la **Derivada** con los problemas de **Optimización** de funciones en **Ciencias Económicas**. En este sentido, las herramientas matemáticas de esta unidad, nos llevaran a resolver planteamientos económicos en los que se busca mejorar aspectos como un costo, un ingreso o un beneficio, etc.

A continuación te presentamos de manera gráfica el conjunto de ideas y conceptos enlazados que estudiaremos en esta unidad de **Aplicaciones de la Derivada:**





Objetivos

General:

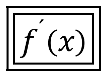
Aplicar el análisis diferencial de funciones a la solución de problemas y modelos matemáticos típicos de las Ciencias Económicas; mostrando una actitud analítica y reflexiva.

Específicos:

- ✓ Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de funciones.
- ✓ Explicar los conceptos de máximos y mínimos relativos y absolutos de funciones.
- ✓ Notar la diferencia entre un extremo relativo y un extremo absoluto.
- ✓ Calcular los extremos relativos de una función.
- ✓ Aplicar la teoría de extremos relativos a problemas de optimización.
- ✓ Explicar los conceptos de concavidad y puntos de inflexión de una función.
- ✓ Calcular los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de una función.
- ✓ Usar la derivación en el trazado de curvas.

5.1 El Signo de la primera derivada.

En la unidad 4, aprendiste a calcular la **Función Derivada Primera**:



Ya sabes que es una nueva **Función** que, como tal, tiene su propio comportamiento.

A partir de ahora aprenderás a reconocer la Información que brindan los Signos de la Función Derivada Primera, respecto del Comportamiento de la Función original $f(x)$. Es decir que el Signo de la Derivada Primera de una función nos permite concluir sobre el Comportamiento de la Función.

5.1.1 Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento de Funciones.

Una de las aplicaciones más importantes del concepto de derivada es su utilización en la determinación de **Comportamientos Crecientes** o **Decrecientes** de las **Funciones**.

Informalmente, decimos que una función **Crece** en un intervalo de la variable independiente, si su gráfica se eleva de izquierda a derecha en ese intervalo.

Recuerda que en la Unidad 1 habíamos determinado que una **Función Crecía** si a valores mayores de la variable independiente, corresponden valores mayores de la función.

En símbolos:

Una función f es creciente en un intervalo si para cualquier par de números a y b del intervalo tal que $a > b$ se cumple que $f(a) > f(b)$.

Por el contrario si una **Función Decrece** en un intervalo de la variable independiente, si su gráfica desciende de izquierda a derecha en dicho intervalo. En la Unidad 1 también habíamos determinado que una Función Decrecía si a valores mayores de la variable independiente corresponden valores menores de la función.

En símbolos:

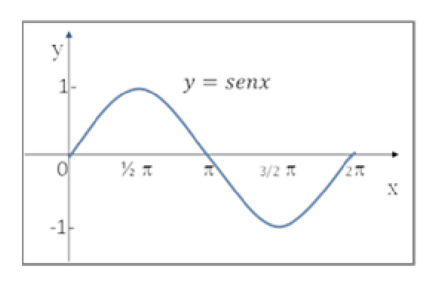
Una función f es decreciente en un intervalo si para cualquier par de números a y b del intervalo tal que $a > b$ se cumple que $f(a) < f(b)$.

Estos comportamientos **Crecientes** o **Decrecientes,** no ofrecen dificultad para detectarlos a partir de los gráficos de las funciones.

Recuerda, por ejemplo que en la Unidad 2, a partir de observar sus representaciones gráficas, establecimos que:

La **Función Exponencial**: $f(x) = b^x$, tiene un comportamiento **Creciente** cuando la base: $b > 1$

También observamos que uno de los intervalos en donde es **Creciente** la **Función Trigonométrica** $y = \operatorname{sen} x$, es en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, etc.



Pero en funciones donde no conocemos su comportamiento gráfico, nos preguntamos ¿cómo conocer en qué intervalos una función es creciente o decreciente? Para poder responderla, analizaremos la **relación** que **existe**

entre el **Signo** de la **Primera Derivada** y los **Intervalos** en donde la función es **Creciente** o **Decreciente**.

Para ello, comenzaremos por reconocer en el siguiente gráfico (Figura 1) los **valores** del **Dominio** en donde la función tiene un comportamiento **Creciente** o **Decreciente**.

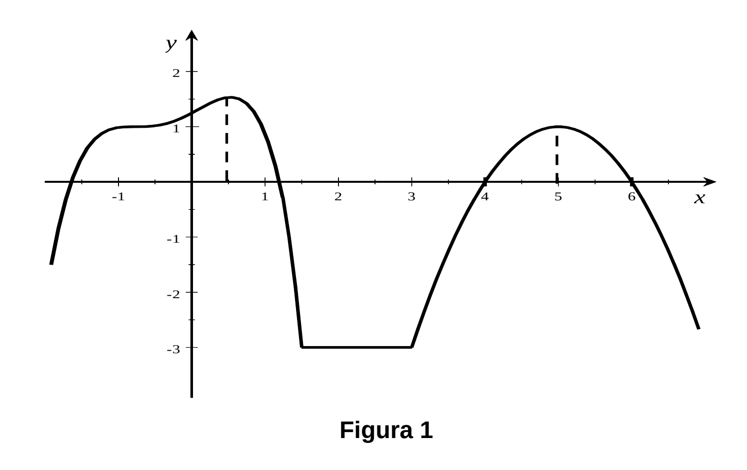


Figura 1

Al observar el **Gráfico** concluimos que:

La **Función Crece** en el intervalo $(-\infty, 0.5)$ y también de $(3,5)$, mientras que de $(0.5,1.5)$ y de $(5,+\infty)$ **Decrece** y es **Constante** de $(1.5,3)$

Ahora trataremos de realizar la conexión entre **Derivada** y **Crecimiento** o **Decrecimiento** de una **Función**.

Recuerda que en la Unidad 4 habíamos establecido que la **Derivada** de una **Función** en un punto x_0 de su Dominio, nos informaba acerca de la **Variación Instantánea** de la **Función** en ese punto x_0. Supongamos que una función viene dada por el siguiente gráfico y se determinó que las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos $x_0 = \frac{7}{5}$ y $x_1 = \frac{9}{2}$ son m_0=-11 y m_1=1 respectivamente:

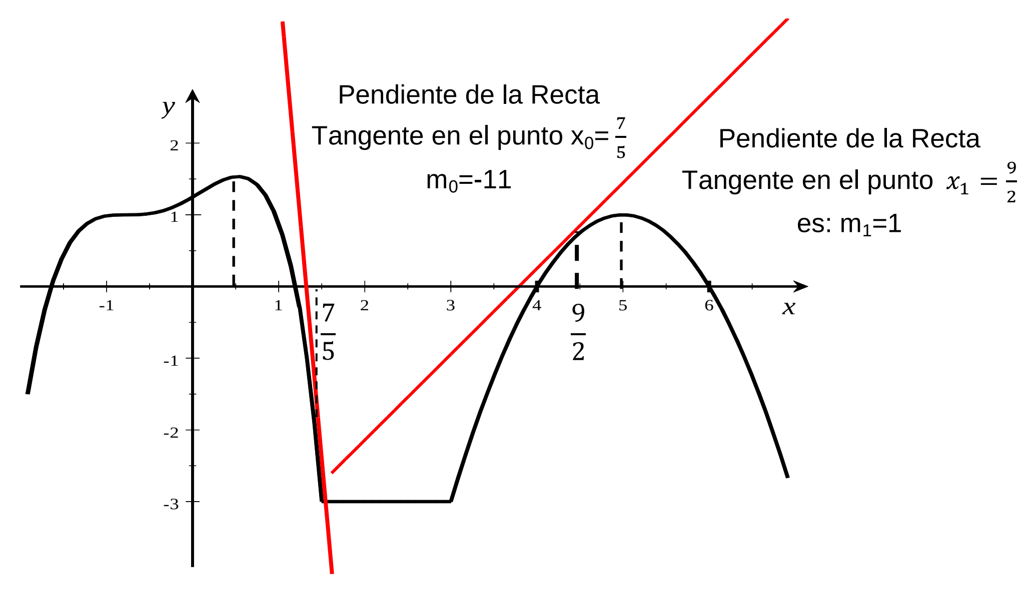


Figura 2:

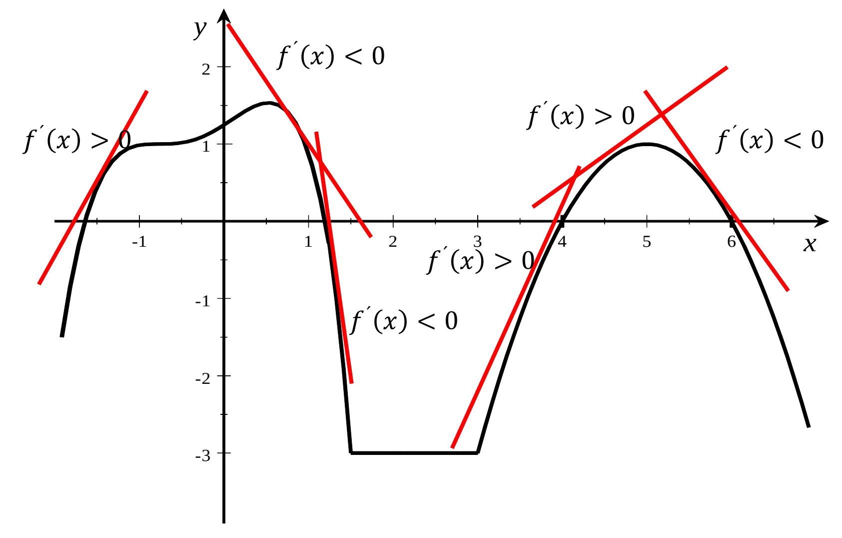
Además sabemos por la Unidad 4 que la **Pendiente** de la **Recta Tangente** a la curva en un punto es la **Derivada** de la **Función** en ese punto.

En nuestro caso tenemos que: $f'\left(\frac{9}{2}\right) = 1$, lo que nos permite afirmar que cuando la variable independiente x vale $\frac{9}{2}$, f está **Creciendo** a un **Ritmo**

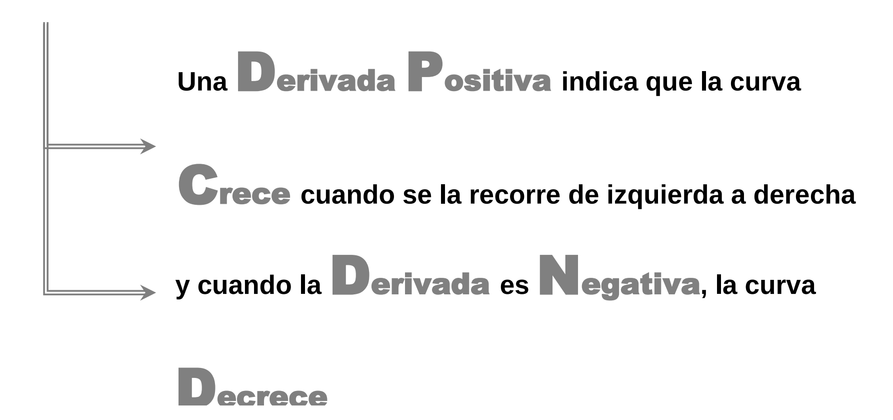
Instantáneo de una unidad por cada unidad que **CRECE** la variable independiente.

Si en cambio conocemos como lo muestra el gráfico, que $f'\left(\frac{7}{5}\right) = -11$, decimos que cuando la variable independiente vale $\frac{7}{5}$, f está **Decreciendo** a un **Ritmo Instantáneo** de 11 unidades por cada unidad que **CRECE** la variable independiente.

Ahora tracemos otras rectas tangentes a la curva de la Figura 1 y observemos los signos que asumen sus derivadas:



Observando el gráfico, podemos concluir que:



Una Derivada Positiva indica que la curva Crece cuando se la recorre de izquierda a derecha

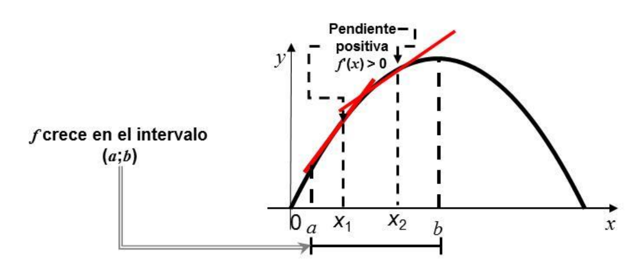
y cuando la Derivada es Negativa, la curva Decrece

Estas observaciones nos permiten formalizar el siguiente criterio para determinar el crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo teniendo en cuenta su derivada primera.

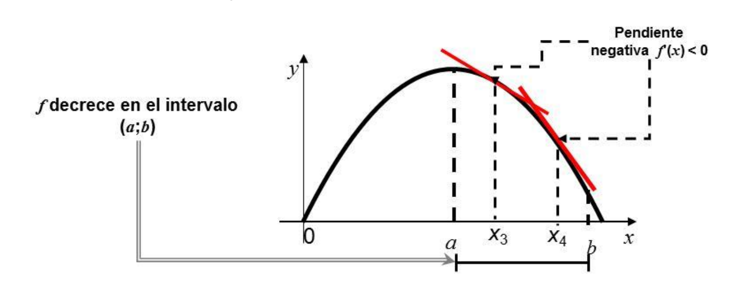
Criterio de **Crecimiento** o **Decrecimiento de Funciones**:

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces:

✓ Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es una función Creciente en (a,b)



✓ Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es una función Decreciente en (a,b)



Para aplicar lo anterior, desarrollaremos un ejemplo sencillo, que te permitirá determinar los intervalos en donde una función **Crece** o **Decrece** sin recurrir a su comportamiento gráfico, sino **Analizando** los **Signos** de su **Derivada Primera**:

Ejemplo: Dada la función de ecuación: $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$. Determinemos los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$, procediendo de la siguiente manera:

1^er^ paso debemos calcular la derivada primera de la f.

$$\boxed{f'(x) = 10x - 20}$$

2do paso debemos resolver la inecuación $f'(x) > 0$ para hallar los valores del dominio para los cuales la función derivada primera es positiva:

$$10x - 20 > 0$$

$$10x > 20$$

$$\boxed{x > 2}$$

Concluimos entonces que la **Función**: $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$ es **Creciente** en el intervalo: $\boxed{(2, +\infty)}$

Análogamente para determinar el intervalo donde f decrece, deberás resolver la inecuación $f'(x) < 0$

$$10x - 20 < 0$$

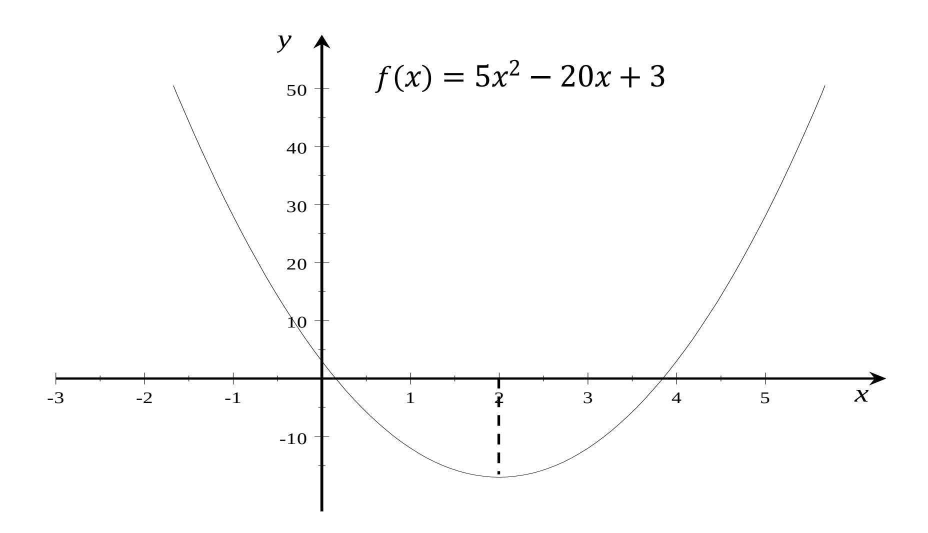
$$10x < 20$$

$$\boxed{x < 2}$$

Concluimos entonces que la **Función**: $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$ es **Decreciente** en el intervalo: $\boxed{(-\infty, 2)}$

Hemos llegado entonces a determinar que cuando $x > 2$ la ***f*** **crece** y que cuando $x < 2$ la ***f*** **decrece**. Nos preguntamos entonces ¿qué ocurre cuando $x = 2$?. Cuando $x = 2$, la derivada $f'(2) = 0$, como no es ni mayor ni menor que cero, la función en $x = 2$ no es creciente ni decreciente.

No obstante si graficamos la $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$, podemos observar que en el punto $x = 2$, la función deja de decrecer para comenzar a crecer, con lo cual es un punto muy importante.



En el apartado que sigue abordamos particularmente el estudio de valores, para los cuales la función presenta un cambio en su comportamiento de "crecimiento".

5.1.2. Extremos Relativos y Absolutos de Funciones de Variable Real.

En la Unidad 4, hemos estudiado que la existencia de la derivada de una función en un punto x_0 significa geométricamente que la curva $y = f(x)$ tiene una recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ y que además $f'(x_0)$ es la pendiente de esa recta tangente. Estas consideraciones permiten determinar, que en aquellos puntos de la curva en los cuales la tangente es horizontal, $f'(x) = 0$. Estos puntos nos aproximarán a las definiciones formales de máximos y mínimos relativos o simplemente **Extremos Relativos**. La denominación se debe a que se compara el valor de la función en un punto con los que se encuentran cercanos. Por ello, se dice, que los extremos relativos son de naturaleza "local".

Comencemos por analizar detenidamente, la siguiente gráfica de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ la cual nos permitirá visualizar intuitivamente los elementos que son objetos de estudio en este apartado:

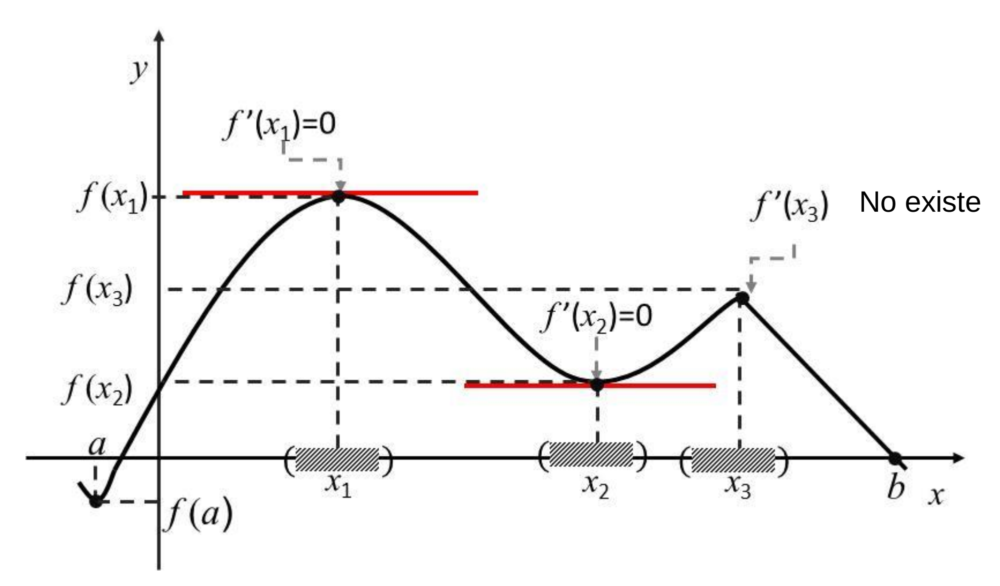


Figura 3

De este modo observamos en la Figura 3 que:

1. $f(x_1)$ es el mayor valor que toma la función en un intervalo abierto que contiene a x_1 . Cuando esto ocurre se dice que $f(x_1)$ es un *máximo relativo* de $f(x)$ o que en x_1 la función alcanza un *máximo relativo*. Además, si trazamos la recta tangente en el punto $(x_1, f(x_1))$ la **pendiente** de esa **recta tangente** es **cero**.
2. De igual modo, $f(x_3)$ es el mayor valor que toma la función en un intervalo abierto que contiene a x_3 . Con lo cual en x_3 la función alcanza un *máximo relativo*. Sin embargo, en x_3 la **derivada** de $f(x)$**no existe** (punto anguloso).

De estas dos observaciones, concluimos que en un punto donde ocurre un máximo relativo no necesariamente debe anularse la derivada.

3. Por otro lado, observamos que $f(x_2)$ es el menor valor que toma la función en un intervalo abierto que contiene a x_2. Se dice, entonces, que $f(x_2)$ es un *mínimo relativo* de $f(x)$ o que en x_2 la función alcanza un *mínimo relativo*. Y además al trazar la recta tangente en el punto $(x_2, f(x_2))$, ocurre que $f'(x_2) = 0$.

Con la expresión **Extremos Relativos** nombramos tanto a un **Máximo Relativo** como a un **Mínimo Relativo**.

Ahora bien, hallar extremos relativos de funciones cuando las mismas vienen representadas por su gráfica, resulta fácil de lograr. Pero, piensen por un instante si la función, nos la hubieran dado representada por su expresión algebraica y nos pidieran hallar los extremos relativos.
A continuación daremos un concepto que es clave en la determinación de extremos relativos:

5.1.2.1. Puntos Críticos de Primer Orden.

Anteriormente habíamos concluido que en los puntos donde la función alcanza **Extremos Relativos**, su **Derivada Es Cero** o **No Existe**. Esa observación nos lleva a enunciar una **condición necesaria** para la existencia de extremos relativos, que no demostraremos:

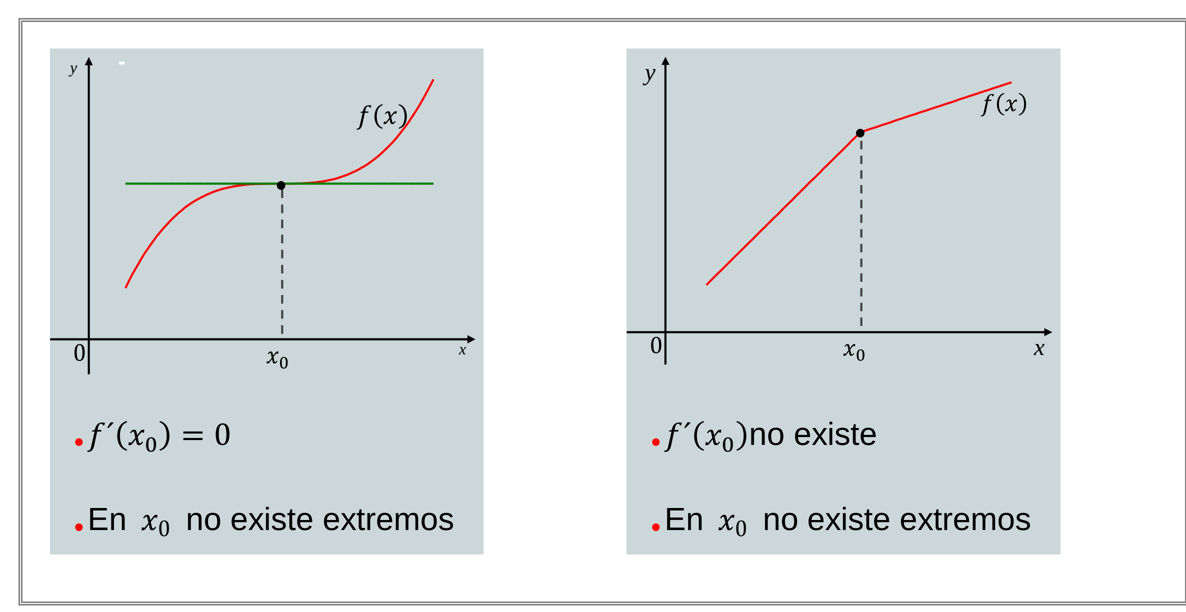
Condición Necesaria para Extremos Relativos:

Si $f(x)$ alcanza un extremo relativo en $x = x_0$, entonces

$\boxed{f'(x_0) = 0}$ o $\boxed{f'(x_0)\ no\ existe}$.

Nota:

Es importante advertir que una función puede satisfacer cualquiera de esas condiciones ($f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe), y sin embargo, carecer de extremo relativo en x_0 , como lo muestran los siguientes gráficos:



De acuerdo con los ejemplos anteriores, **los valores de x** donde la derivada es cero o no existe, es **POSIBLE** que la función presente algún extremo relativo y se los denomina:

Puntos Críticos de Primer Orden:

Sea f una función definida en un intervalo (a, b). Un número $x_0 \in (a, b)$ es un **punto crítico** de f si $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe.

Veamos un ejemplo de puntos críticos en una función de Costo:

Ejemplo 1: Cuando se producen q unidades de un cierto artículo, el costo total de fabricación es: $C(q) = 3q^2 - 12q + 75$ dólares para $1 \leq q \leq 100$ ¿A qué nivel de producción será menor el **costo total** de fabricación?

Calculamos la derivada de la función Costo: $C'(q) = 6q - 12$

Igualamos a cero la $C'(q)$ y despejamos q:

$$6q - 12 = 0 \leftrightarrow 6q = 12 \leftrightarrow q = \frac{12}{6} = 2$$

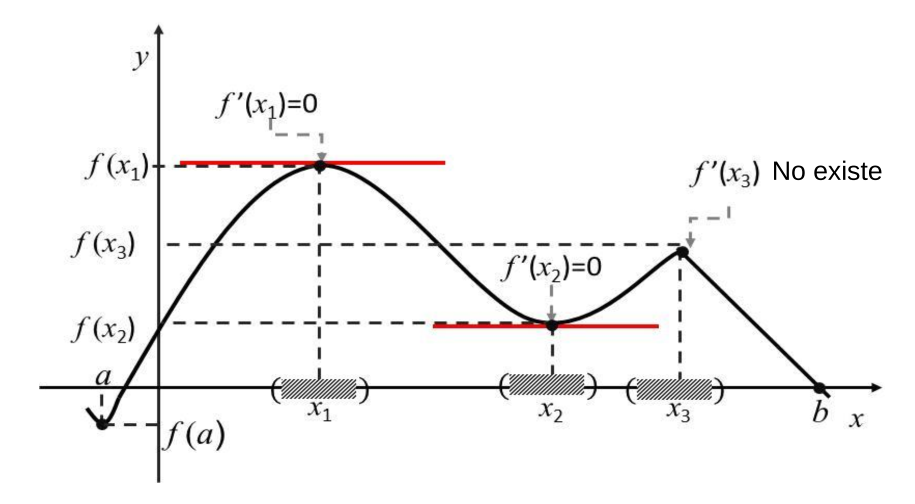
El **punto Crítico de Primer Orden** $q = 2$**,** es el **posible** nivel de producción que hará que el Costo asuma un valor **Mínimo Relativo**. Pero esto no nos asegura que en $q = 2$ alcance el mínimo, ya que como hemos destacado

anteriormente, **TODO Extremo Relativo OCURRE** en un **Punto Crítico**, pero **NO TODO Punto Crítico PRODUCE un Extremo Relativo**.

Esto implica, que una vez que hemos encontrado los puntos críticos de una función, debemos seguir trabajando para determinar sí ellos conducen a extremos relativos.

Una de las herramientas matemática que nos conduce a la existencia de extremos relativos, es el signo de la derivada primera.

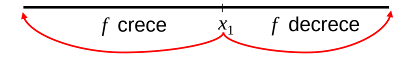
Volvamos a la figura 3:



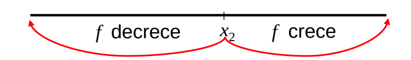
Por la definición anterior, los valores x_1 , x_2 y x_3 son los **Puntos Críticos** de la **Función** f y podemos advertir la función en esos puntos críticos presenta un cambio en su comportamiento de "crecimiento".

En particular:

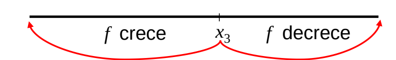
1. En $x_1$la función f presenta un **Máximo Relativo** y tenemos que:



2. En $x_2$la función f presenta un **Mínimo Relativo** y tenemos que:



3. En x_3 la función f presenta un **Máximo Relativo** y tenemos que:



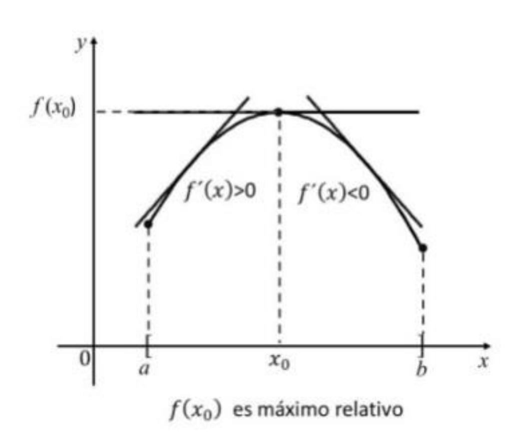
Pero como hemos visto en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función f, están determinados por el signo de la Derivada Primera f'. Esto nos permite enunciar el siguiente criterio:

5.1.2.2. Criterio de la Primera Derivada para la determinación de Extremos Relativos.

Sea f una **Función Continua** en el intervalo $[a, b]$ y **Derivable** en (a, b) excepto quizás en el punto crítico $x_0 \in (a, b)$.

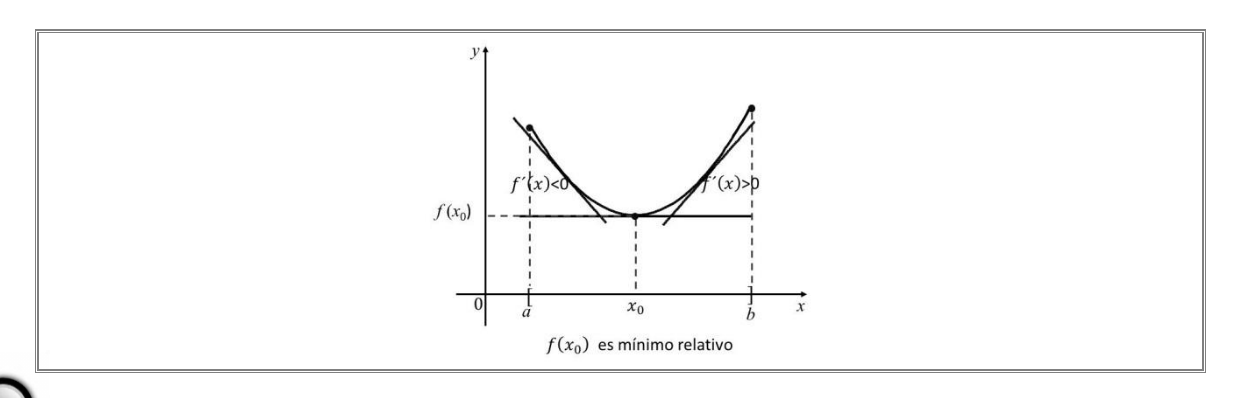
Entonces:

i. Si x_0 es punto crítico de primer orden de f y $\boxed{f'(x) > 0}$ $\forall x \in (a, x_0)$ y $\boxed{f'(x) < 0}$ $\forall x \in (x_0, b) \Rightarrow f$ tiene un **Máximo Relativo** en x_0.



$f(x_0)$ es máximo relativo

ii. Si x_0 es punto crítico de primer orden y $\boxed{f'(x) < 0}$ $\forall x \in (a, x_0)$ y $\boxed{f'(x) > 0}$ $\forall x \in (x_0, b) \Rightarrow f$ tiene un **Mínimo Relativo** en x_0.



$f(x_0)$ es mínimo relativo

Observación:

El criterio también se puede expresar como:

Siendo $x = x_0$ punto crítico de primer orden de f:

i. Si la **Derivada** $f'(x)$ cambia en $x = x_0$ de **Positiva**(+) a **Negativa**(-), entonces f alcanza un punto **Máximo Relativo** en $x = x_0$.

ii. Si la **Derivada** $f'(x)$ cambia en $x = x_0$ de **Negativa**(-) a **Positiva**(+), entonces f alcanza un punto **Mínimo Relativo** en $x = x_0$.

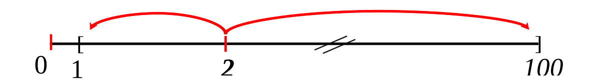
Así para hallar los extremos relativos podemos seguir la siguiente:

Estrategia:

- Determinamos el **Dominio** de la función.
- Localizamos los números donde la **Derivada Primera** es **CERO** o **NO EXISTE** (Puntos Críticos de primer orden).
- Buscamos el **Signo** de la **Derivada Primera** de la función en cada uno de los intervalos determinados por los **Puntos Críticos** hallados. Analizamos el signo de f' a la izquierda y derecha del Punto crítico, considerando un valor cualquiera dentro de cada intervalo al que se denomina valor prueba.

Retomemos el ejemplo 1 de este apartado y determinemos sí el Costo en $q = 2$ presenta un **Mínimo Relativo** aplicando el **Criterio** de la **Primera Derivada**

Es decir, que debemos determinar qué **Signo** tiene la **Derivada Primera** del Costo a la **Derecha** y a la **Izquierda** de $q = 2$.
En primer lugar establecemos los intervalos en los que se **SUBDIVIDE** el **Dominio** del Costo teniendo en cuenta el **Punto Crítico** $q = 2$:



Luego determinamos los intervalos $(1,2)$ y $(2,100)$ y calculamos el signo de la derivada primera en el intervalo $(1,2)$ y en el intervalo $(2,100)$ a través de sus valores pruebas. Y construimos la siguiente tabla:

Intervalos del dominio	Valor prueba	Signo de $f'(x)$	Crecimiento /Decrecimiento de f
$(1,2)$	$f'\left(\frac{3}{2}\right)$	$-$	decrece
$(2,100)$	$f'(4)$	$+$	crece

De este modo observamos que alrededor de $q = 2$ el signo de la derivada primera cambia de negativa a positiva, entonces por el **Criterio de la Derivada Primera** el Costo, tiene un **Mínimo Relativo** en $q = 2$.

En realidad, en este caso como en la mayoría de los problemas económicos nos interesa determinar extremos absolutos, más que relativos.

Los **Máximos** y **Mínimos Absolutos** son los valores máximo o mínimo que asume la **Función** en todo su dominio.

El problema que ahora nos planteamos es encontrar el máximo absoluto o el mínimo absoluto de una función definida en un intervalo:

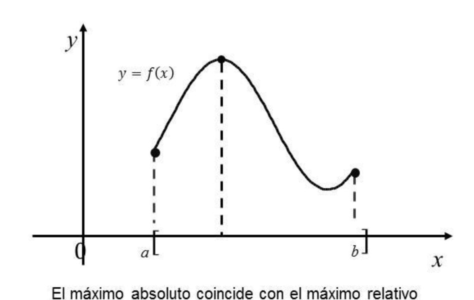
5.1.2.3. Extremos Absolutos.

Extremos Absolutos en Intervalos Cerrados:

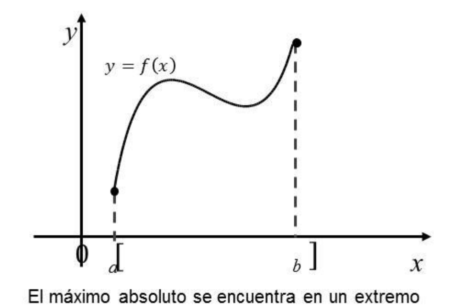
Si una función $f(x)$ es **Continua** en un intervalo **Cerrado** $[a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza un **Máximo Absoluto** y un **Mínimo Absoluto** sobre el **Intervalo**.

Este afirmación **GARANTIZA** la existencia de **Extremos Absolutos** para una **Función Continua** en un intervalo **Cerrado**, pero nada dice cómo determinarlos. Sin embargo, intuitivamente observamos que un extremo absoluto se presenta o en un extremo relativo del intervalo o en uno de los extremos del intervalo:

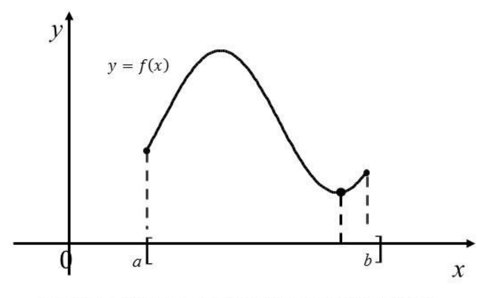
Observaciones:



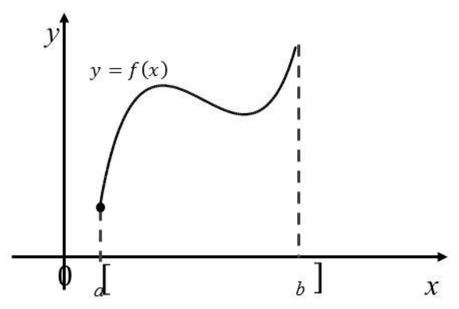
El máximo absoluto coincide con el máximo relativo



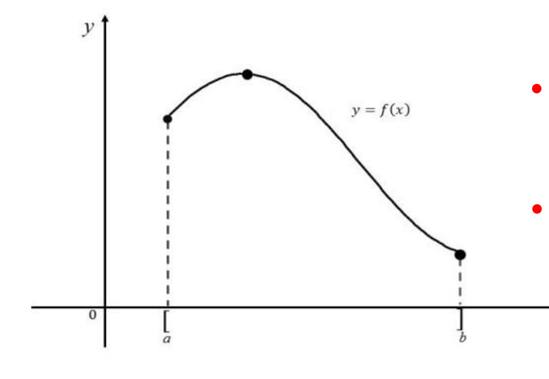
El máximo absoluto se encuentra en un extremo



El mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo



El mínimo absoluto se encuentra en un extremo



- El máximo absoluto coincide con el máximo relativo.
- El mínimo absoluto no es un mínimo relativo.

Como **procedimiento** para hallar los **Extremos Absolutos** de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ podemos seguir la siguiente:

Estrategia:

- Se determinan los **Puntos Críticos** x_0 de f resolviendo $f'(x) = 0$ o donde $f'(x)$ no existe.
- Se identifican los valores x_0 en donde la función presenta extremos **Relativos**
- Se **Evalúa** la **Función** en los **Extremos** del **Intervalo** y en los extremos **Relativos**. Es decir, calculando $f(a)$, $f(b)$ y $f(x_0)$.
- Se comparan esos valores para determinar cuál es el mayor o menor valor. El máximo absoluto de f es el máximo valor entre $f(a)$, $f(b)$ y $f(x_0)$ y el mínimo absoluto de f es el mínimo valor entre $f(a)$, $f(b)$ y $f(x_0)$.

Así en nuestro caso ejemplo, calculamos $C(1)$, $C(100)$ y $C(2)$ y obtenemos que:

$$\boxed{C(1)} = 3.1 - 12.1 + 75 = \boxed{66}$$

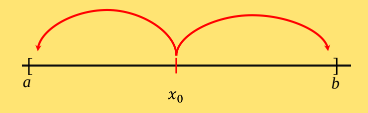
$$\boxed{C(100)} = 3.10000 - 12.100 + 75 = \boxed{28875}$$

$$\boxed{C(2)} = 3.4 - 12.2 + 75 = \boxed{63}$$

Como $63 < 66 < 28875$, concluimos que el Costo presenta un **MÍNIMO ABSOLUTO** cuando se producen 2 unidades y también podemos afirmar que alcanza un **MAXIMO ABSOLUTO** cuando q=100.

Para finalizar este apartado te sugerimos el siguiente **Procedimiento Práctico** para determinar los **Extremos Relativos** y **Absolutos** de una **Función** f:

1. Determinar el dominio de definición de f.
2. Calcular $f'(x)$ y determinar su dominio.
3. Obtener los puntos críticos de primer orden de f, **posibles** extremos relativos de la función, resolviendo: $f'(x) = 0$. Incluye también los valores de $x \in Dom\, f$ en los que no está definida la derivada, es decir donde la $f'(x)$ no existe.
4. Determina los intervalos en los que se subdivide el Dominio de la función teniendo en cuenta los **puntos críticos** hallados. Es decir, si el $Dom\, f = [a, b]$ y $x_0$es el punto crítico de primer orden, el dominio de la función se subdivide en los intervalos: (a, x_0)y (x_0, b):



5. Calcula la derivada primera en valores prueba pertenecientes a cada intervalo obtenido y establece su signo.

6. Completa una la tabla como la siguiente, para ordenar los resultados que vas obteniendo:

Intervalos del Dominio	Valor Prueba	Signo de $f'(x)$	Crecimiento/ Decrecimiento de f

7. Aplica el criterio del signo de la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. Completa la columna correspondiente de la tabla anterior.

Para hallar Extremos Absolutos:

8. Halla los puntos máximos y mínimos relativos de la función a través del criterio del signo de la primera derivada para extremos relativos o locales.

9. Halla los extremos absolutos evaluando la función en los extremos del intervalo y en el extremo relativo que hallaste y luego compares sus valores para determinar cuál es el mayor o menor valor.

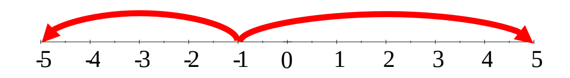
Ejemplo: Dada la función: $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$. Se desea determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento y la existencia o no de extremos relativos y absolutos de f en el intervalo $[-5,5]$

1er paso: $Dom\ f = [-5,5]$ dominio restringido por el contexto del problema

2do paso: $\boxed{f'(x) = 4x + 4}$ y su $Dom\ f' = [-5,5]$

3erpaso: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ **Punto Crítico de Primer Orden**, **POSIBLE** extremo relativo.

4to paso: Hallar los intervalos en los que se subdivide el Dominio de f:



5toy 6to pasos:

Intervalos del dominio	Valor prueba	Signo de f'		Crecimiento/Decrecimiento de f
$(-5,-1)$	$x=-2$	-	Mínimo relativo	**Decrece**
$(-1,5)$	$x=0$	+		**Crece**

Luego concluimos que:

La **Función** f **Crece** en: $\boxed{(-1,5)}$

La **Función** f **Decrece** en: $\boxed{(-5,-1)}$

La **Función** f alcanza un **Mínimo Relativo** en $\boxed{x=-1}$

Para hallar los extremos absolutos debemos calcular:

$f(-5)=2(-5)^2+4(-5)+6=\ 36$ $\qquad f(-1)=2(-1)^2+4(-1)+6=\boxed{4}$

$$f(5)=2(5)^2+4(5)+6=\boxed{76}$$

La **Función** alcanza un **Mínimo Absoluto** en $x=-1$y un **Máximo Absoluto** en $x=5$

Veamos otro ejemplo donde el punto crítico de primer orden no es extremo relativo.

Ejemplo: Consideremos la función: $f(x)=x^3$ y determinemos los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento, analizando si la misma presenta extremos relativos

Comenzamos por hallar el Dominio de f: $f(x) = x^3$ como es una función polinómica $\Rightarrow \boxed{Dom\ f = IR}$

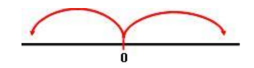
$$f'(x) = 3x^2 \text{ y su } \boxed{Dom\ f' = IR}$$

Hallar los valores que hacen que: $f'(x) = 0$

$$3x^2 = 0$$

$\boxed{x = 0} \Rightarrow$ Punto Crítico de Primer orden **POSIBLE** extremo relativo

Hallar los intervalos en los que se subdivide el Dominio de f:



Intervalos del dominio	Valor prueba	Signo de f'	Crecimiento/Decrecimiento de f
$(-\infty, 0)$	$x = -1$	+	**Crece**
$(0, +\infty)$	$x = 1$	+	**Crece**

Luego concluimos que:

La **Función** f **Crece** en todo su Dominio: $(-\infty, +\infty)$. Y debido a que la **Derivada** f' **NO CAMBIA** de signo a la izquierda ni a la derecha de 0, la **Función** f **NO TIENE** Extremos Relativos

Nota:

- ✓ No todo punto crítico corresponde a un extremo relativo
- ✓ Si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de primer orden

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 1: Dadas las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $f(x) = senx$; en el intervalo $[0, 2\pi]$

1°) Represéntalas gráficamente.

2°) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones considerando las pendientes de las rectas tangentes

Actividad 2: Halla los intervalos en donde las funciones son crecientes o decrecientes, aplicando el criterio del signo de la primera derivada

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
b) $f(x) = -2x$

Actividad 3: Determina si las siguientes funciones presentan extremos relativos en algún punto de su dominio

$a)\ f(x) = 2x^2 - 8x + 10$ $c)\ f(x) = -2x$

$b) f(x) = x^{2/3} + 2$ $d) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 36x + 14$

Puedes utilizar el siguiente procedimiento:

1°) Escribe su correspondiente dominio de definición.

2°) Obtiene los puntos críticos de primer orden, posibles extremos relativos de la función. (Recordando que: En $x = a \in Domf$ la función, f , presenta un punto crítico de primer orden si $f'(a) = 0$ o $f\,'(a)$ no está definida, es decir $x = a \notin Dom\ f'$).

3°) Determina los intervalos en los que se subdivide el Dominio de la función teniendo en cuenta los valores críticos hallados y escríbelos en una tabla como la siguiente:

Intervalos del Dominio de *f*	Valor Prueba	Signo de *f ´*	Crecimiento /Decrecimiento de *f*

4°) Calcula *f ´* en valores pruebas pertenecientes a cada intervalo obtenido y establece su signo; completa la columna correspondiente de la tabla anterior.

5°) Aplica el criterio del signo de la primera derivada para crecimiento y decrecimiento de una función. Completa la columna correspondiente de la tabla anterior.

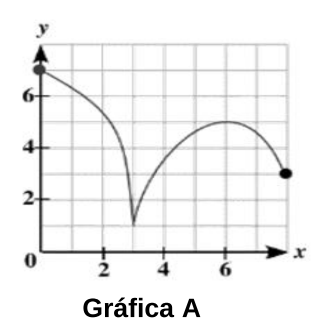
6°) Halla los puntos máximos y mínimos relativos de la función a través del criterio del signo de la primera derivada para extremos relativos o locales.

Actividad 4: Halla los extremos relativos de la función: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$. Calcula también los valores máximo y mínimo absoluto de dicha función en el intervalo $[-2; 2]$.

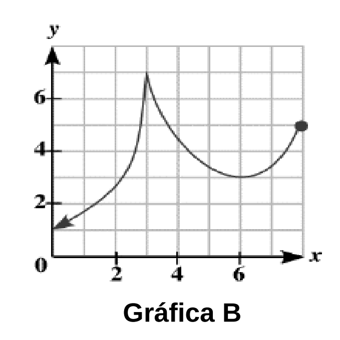
Puedes utilizar esta *guía* para hallar los valores extremos absolutos de una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$:

1) Halla los valores de abscisas donde la función presenta extremos relativos.
2) Evalúa la función en dichos valores para obtener los extremos relativos de la misma.
3) Evalúa la función en los valores extremos del intervalo: $f(a)$ y $f(b)$.
4) Determina los valores máximo y mínimo absoluto de la función, que son los que corresponden al mayor y menor valor que asume la función como imagen, en los pasos 2 y 3.

Actividad 5: Teniendo en cuenta las gráficas A y B de las funciones, completa las tablas según los valores de x indicados, evaluando si presenta mínimos/máximos relativos o absolutos, justificando a través del signo de la derivada primera, cuando corresponda:



Gráfica A



Gráfica B

Ten en cuenta: *Toda función continua en un intervalo cerrado* [a, b], *siempre alcanza un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en dicho intervalo* [a ,b].

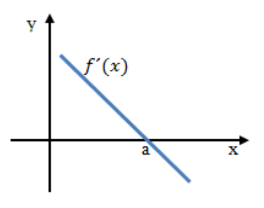
Gráfica A

Valor	f presenta/no presenta
$x = 0$	
$x = 3$	
$x = 6$	
$x = 8$	

Gráfica B

Valor	f presenta/no presenta
$x = 0$	
$x = 3$	
$x = 6$	
$x = 8$	

Actividad 6: Dada la gráfica de la función derivada primera, $f'(x)$, completa la proposición y tabla subsiguiente, y concluye sobre la existencia o no de extremos relativos de la función $f(x)$:



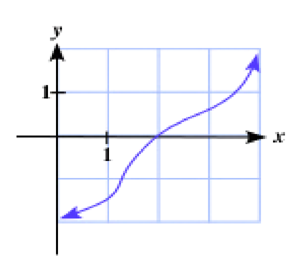
$f'(a) =$ ……., entonces en $x = a$ la función presenta …………………………....

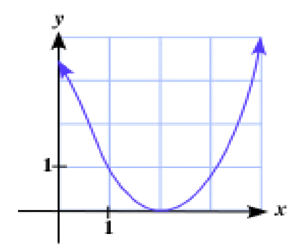
Intervalo del Dominio de f	Signo de $f'(x)$	Crecimiento/Decrecimiento de $f(x)$

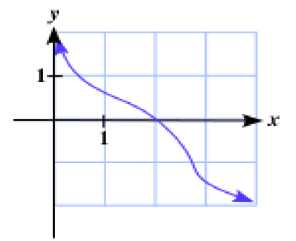
Completa y fundamenta:

En $x = a$, la función presenta …………………………………………………....

Actividad 7: Marca la gráfica que representa la ***derivada*** de f (f') , si se sabe que la función f presenta un mínimo relativo en $x = 2$.







Actividad 8: La cotización en la Bolsa de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$$C(x) = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$$

a. Determina las cotizaciones máximas y mínimas, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.

b. Determina los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

Actividad 9: Considérese una empresa que opera en el mercado bajo la siguiente función de costos totales: $CT(x) = 0.1x^2 + 10x + 50$ y con un precio de venta dado por el mercado de $20 por unidad. Dada esta información contesta las siguientes preguntas:

a) Para maximizar las utilidades ¿cuántas unidades debe producir la empresa?, sabiendo que el nivel de producción diaria es de 94 unidades inclusive.

b) ¿A cuánto asciende las utilidades?

En la mayoría de las situaciones analizadas, sabiendo simplemente si la derivada de una función $f(x)$ en un punto es mayor, menor o igual a cero, pudimos establecer ciertos comportamientos de $f(x)$.

Veremos a partir de ahora, cómo ampliar el análisis del comportamiento de $f(x)$, utilizando el signo de la **DERIVADA SEGUNDA**.

En la mayoría de las situaciones analizadas, sabiendo simplemente si la derivada de una función $f(x)$ en un punto es mayor, menor o igual a cero, pudimos establecer ciertos comportamientos de $f(x)$.
*Veremos a partir de ahora, cómo ampliar el análisis del comportamiento de $f(x)$, utilizando el signo de la **DERIVADA SEGUNDA**.*

5.2 El Signo de la segunda derivada.

Hasta ahora, hemos estudiado la Derivada de una función, ó, la Primera Derivada de una Función, ó la Derivada de Primer Orden de una Función.

Ahora, nos detendremos en el estudio de la **Segunda Derivada**. Antes daremos respuesta a la siguiente pregunta:

¿A qué llamamos Segunda Derivada?

Muchas veces, interesa el caso, en el cual la **Función Derivada** $f'(x)$, se puede derivar nuevamente en un intervalo, obteniéndose de esta forma la **Segunda Derivada** de la **Función**.

Es decir, si existe:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

A este límite se le llamará la **Segunda Derivada** de f, o también, la **Derivada de Segundo Orden** y se denotará por cualquiera de los símbolos: $f''(x)$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$

La **Segunda Derivada** $f''(x)$ de una función, es la **DERIVADA DE LA DERIVADA PRIMERA** y se determina aplicando las mismas reglas de derivación que se usaron para calcular la primera derivada.

Las derivadas de orden 2 en adelante se denominan **DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR**.

Del mismo modo la **Derivada** de $f''(x)$, si existe, se llama la **Tercera Derivada** de f, y se escribe $\boxed{f'''(x)}$ o $\boxed{\frac{d^3y}{dx^3}}$, y continuando con este proceso, podemos encontrar **Cuartas**, **Quintas**, **n** derivadas de orden superior. A la derivada de orden n de f, se la denota por: $f^n(x)$ o $\frac{d^ny}{dx^n}$

Ejemplo: Sea $f(x) = 4x^3 + 3x^2$, Hallar las siguientes derivadas: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{IV}(x)$.

$$f'(x) = 12x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 24x + 6$$

$$f'''(x) = 24$$

$$f^{IV}(x) = 0$$

En este ejemplo las derivadas de orden 4 en adelante se anulan, ya que la derivada de una constante es cero.

En esta asignatura solo utilizaremos en el **Análisis** de las **Funciones** los **Signos** de la **Primera** y **Segunda Derivada**.

Recuerda:

En la unidad anterior estudiamos que la **Primera Derivada** de una **Función** representa la **Razón** de **Cambio** de la **Función** y nos **Informa** acerca del **Ritmo** de **Cambio** de la **Función** en cada uno de sus puntos.

Aquí nos preguntamos: ¿Qué nos informa la **Segunda Derivada**?

Aplicando el mismo concepto, decimos que la **Segunda Derivada** representa la **Razón** de **Cambio** de la **Primera Derivada**.

Esta importante aplicación nos permitirá obtener información acerca de **Qué MANERA está Creciendo o Decreciendo una Función** continua.

Observa como ejemplo, el comportamiento creciente de las siguientes funciones:

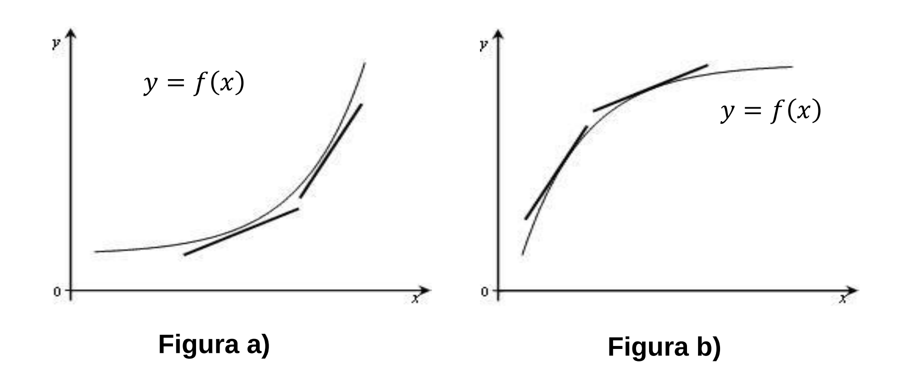


Figura a) **Figura b)**

Es fácil advertir que ambas **Funciones Crecen**, e intuitivamente podemos afirmar que la **Función** representada en la figura a) está creciendo mucho **MÁS RÁPIDAMENTE** que la b), pero, es posible que esta diferencia en la **Rapidez de Crecimiento** la podamos advertir formalmente?

Observación:

La **Función** representada en la figura a) es **Creciente**, ya que las **Pendientes** de sus rectas tangentes son **Positivas** y además su Ritmo de Crecimiento también Crece. Esta última afirmación surge de observar que las **pendientes** de sus **rectas tangentes** son cada vez **mayores**.

En cambio la función representada en la figura b) es **Creciente** pero su **Ritmo de Crecimiento** es **Decreciente**, es decir que Crece pero a un Ritmo de Cambio cada vez MÁS LENTO. Observa en la figura b) que sus pendientes son positivas, pero a medida que nos trasladamos de izquierda a derecha, las Pendientes de sus rectas tangentes van Decreciendo.

En general, cuando la Gráfica de una Función continua queda por ENCIMA de las Rectas Tangentes, se dice que la Función es CÓNCAVA HACIA ARRIBA (algunos autores la llaman Convexa) y su Ritmo de Cambio es Creciente.

En cambio, si la Gráfica de la Función queda por DEBAJO de las Rectas Tangentes la Función es CÓNCAVA HACIA ABAJO y esto implica que su Ritmo de Cambio es Decreciente.

Lo que haremos seguidamente será exponer, la conexión entre la Segunda Derivada de una Función f y la Concavidad de su Gráfica.

5.2.1. Intervalos de Concavidad de Funciones.

Al comenzar esta unidad hemos aprendido que cuando la **Derivada Primera** de cualquier función es **Positiva**, entonces esa **Función** es **Creciente**. Es decir:

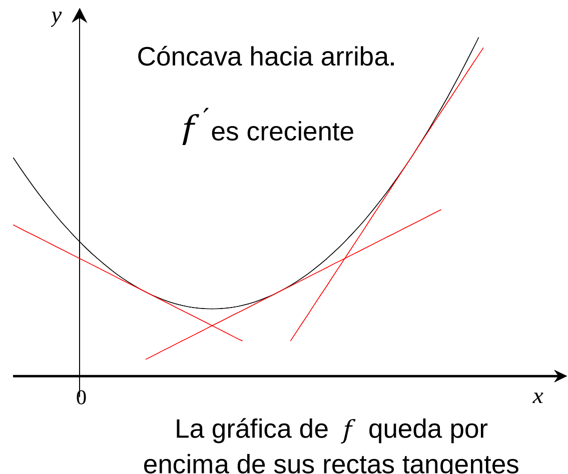
Si $f^{'}(x) > 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es una función Creciente en (a,b).

Entonces:

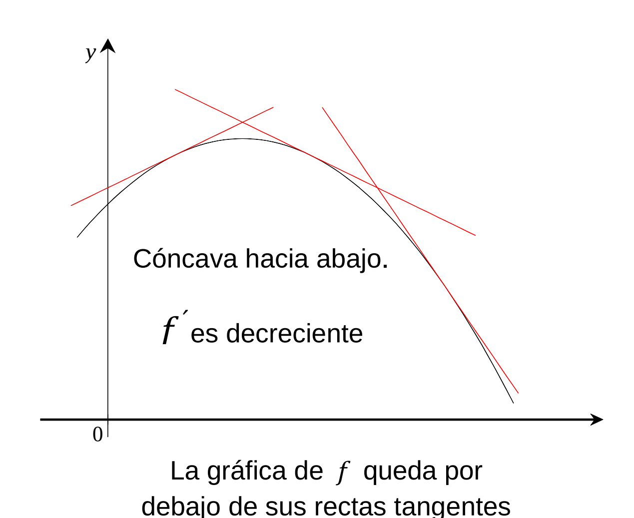
Si $f^{''}(x) > 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow f^{'}$ es una función Creciente en (a,b)

- ✓ Es decir, si la Segunda Derivada de la función f es Positiva, entonces la Primera Derivada $f^{'}$ es Creciente y las Pendientes de las Rectas Tangentes están Creciendo al PASAR de Izquierda a Derecha a lo largo de la Gráfica de f.
- ✓ De la misma manera, cuando la Segunda Derivada $f^{''}$ es Negativa, entonces la Primera Derivada $f^{'}$ es Decreciente y las Pendientes de las rectas tan Rectas Tangentes Decrecen al PASAR de Izquierda a Derecha a lo largo de la Gráfica de f.

En la siguiente figura se muestran dos funciones con distintos comportamientos, de manera de evaluar la relación entre el signo de f'' y la concavidad que presentan.



$\boxed{f''(x) > 0} \Rightarrow f'(x)$ es **Creciente**$\Rightarrow f(x)$ es **Cóncava hacia Arriba**



$\boxed{f''(x) < 0} \Rightarrow f'(x)$ es **Decreciente**$\Rightarrow f(x)$ es **Cóncava hacia Abajo**

El análisis que hicimos anteriormente, sugiere las siguientes conclusiones:

Concavidad:

Sea f una **Función** que admite derivadas primera y segunda en todo punto de un intervalo (a,b). Entonces:

- Si $f''(x) > 0 \forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow f$ es **Cóncava** hacia **Arriba** en (a,b)
- Si $f''(x) < 0 \forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow f$ es **Cóncava** hacia **Abajo** en (a,b)

Veamos un ejemplo que te permita apreciar cómo hallar los intervalos en los cuales una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Ejemplo: Sea la función: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$. Se desea hallar los intervalos para los cuales la función presenta un comportamiento cóncavo hacia arriba y hacia abajo

Como primer paso debemos hallar la derivada primera para luego hallar la segunda:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$
$$f''(x) = 6x - 6$$

Luego para encontrar los intervalos en los cuales la función presenta un comportamiento **Cóncavo hacia Arriba**, deberemos resolver la inecuación $f''(x) > 0$:

$$6x - 6 > 0$$
$$6x > 6$$
$$\boxed{x > 1}$$

Luego la **Función** es **Cóncava** hacia **Arriba** en el intervalo $(1, +\infty)$ y su **Ritmo** de **Cambio** es **Creciente**

De forma análoga, para establecer la **Concavidad** hacia **Abajo**, se resuelve la inecuación $f''(x) < 0$

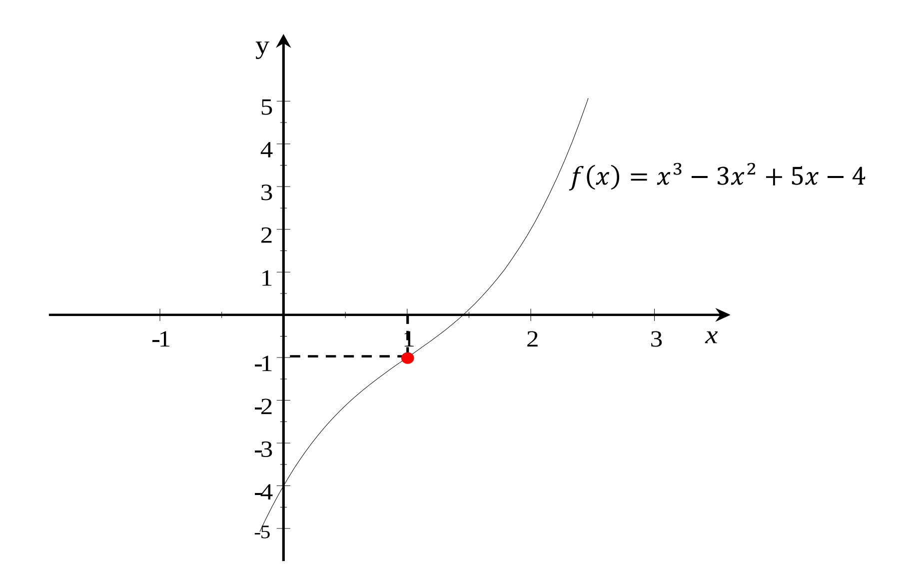
$$6x - 6 < 0$$

$$6x < 6$$

$$\boxed{x < 1}$$

Luego la **Función** es **Cóncava** hacia **Abajo** en el intervalo $(-\infty, 1)$ y su **Ritmo** de **Cambio** es **Decreciente**.

Esto se corresponde con su comportamiento gráfico que se muestra en la siguiente figura:



Así como nos interesamos particularmente por los puntos donde la función deja de crecer para comenzar a decrecer o a la inversa, también estudiaremos con detenimiento los puntos donde la gráfica de la función modifica su concavidad.

5.2.2. Punto de Inflexión.

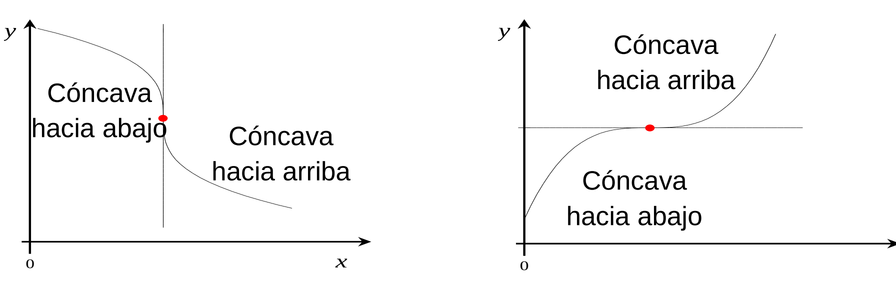
Estos puntos donde la concavidad cambia de sentido pero no su ritmo de cambio reciben el nombre de Puntos de Inflexión:

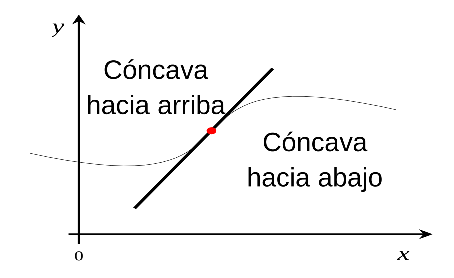
Punto de Inflexión:

Una **Función** f tiene un **punto de inflexión** en $x = x_0$ sí y sólo si f es **Continua** en x_0 y f **Cambia** la concavidad en x_0 pero **no cambia el signo de su ritmo de cambio.**

Es decir que una **Función** f alcanza un punto de inflexión en $x = x_0$, si f es continua en $x = x_0$ y **Cóncava** hacia **Arriba** / **Abajo** a un lado de $x = x_0$ y **Cóncava** hacia **Abajo** / **Arriba** al otro lado de $x = x_0$, pero manteniendo la función el comportamiento Creciente/Decreciente, por lo que la **Derivada Primera** alrededor de $x = x_0$ **no cambia de signo.**

Ejemplos de gráficas que en un punto presentan puntos de inflexión:





A continuación daremos un concepto que es clave en la determinación de puntos de inflexión:

5.2.3. Puntos Críticos de Segundo Orden.

Para localizar los **Posibles puntos de inflexión**, basta determinar los valores de x donde $f''(x) = 0$ y aquellos en que $f''(x)$ no está definida que se denominan **Puntos Críticos de Segundo Orden.**

Pero al igual que establecimos cuando analizamos los puntos críticos de primer orden, en el caso de los de **segundo orden**, su localización **no nos garantiza la existencia de puntos de inflexión**.

Puede suceder que la segunda derivada sea cero, o no exista en un punto que **no es punto de inflexión**.

Esa observación nos lleva a enunciar una **condición necesaria** para la existencia de puntos de inflexión, que no demostraremos:

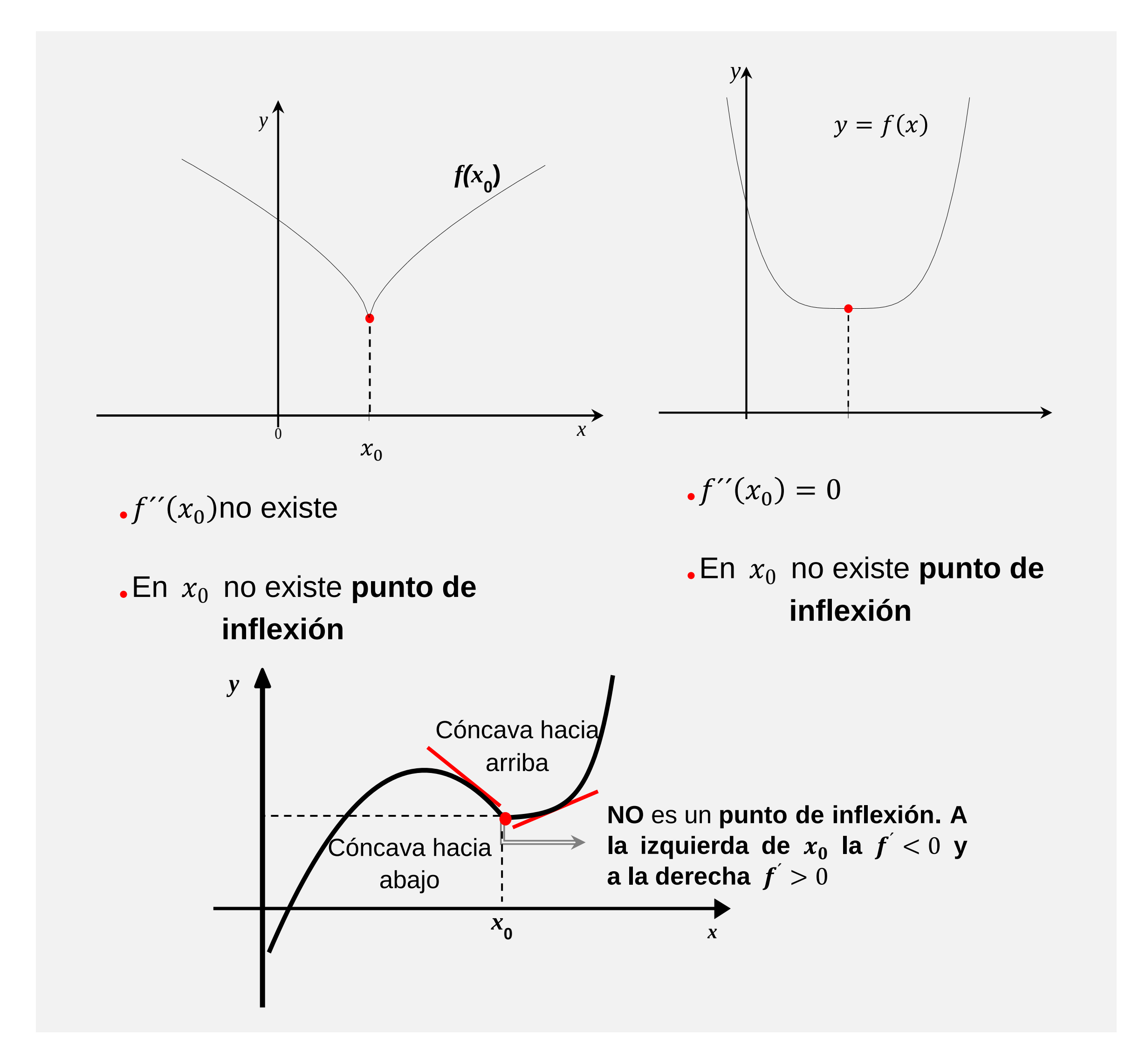
Condición Necesaria para Puntos de Inflexión:

Si $f(x)$ alcanza un punto de inflexión en $x = x_0$, entonces

$\boxed{f''(x_0) = 0}$ o $\boxed{f''(x_0)\ no\ existe}$.

Nota:

Es importante advertir que una función puede satisfacer cualquiera de esas condiciones ($f''(x_0) = 0$ o $f''(x_0)$ no existe), y sin embargo, carecer de punto de inflexión en x_0 , como lo muestran los siguientes gráficos. En el primero la derivada segunda en x_0 no existe pues ya no existe la derivada primera, en el segundo la $f''(x_0) = 0$, pues la derivada primera ya es cero y en ambas situaciones la concavidad no cambia. Mientras que en el tercero se produce que la $f''(x_0)$ no existe ya que la derivada primera no existe, cambia la concavidad pero también cambia el signo de la derivada primera.



De acuerdo con los ejemplos anteriores, los números donde la segunda derivada es cero o no existe, son **POSIBLES** puntos de inflexión y se los denomina:

Puntos Críticos de Segundo Orden:

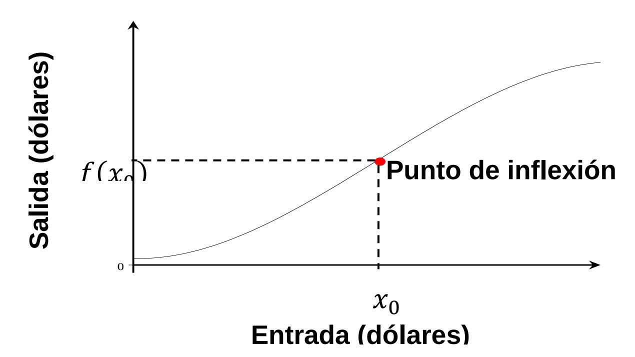
Sea f una función definida en un intervalo (a, b). Un número $x_0 \in (a, b)$ es un **valor crítico de segundo orden** de f si $f''(x_0) = 0$ o $f''(x_0)$ no existe. El **punto crítico de segundo orden** de la función es el punto: $(x_0, f(x_0))$

Para que un Punto Crítico de Segundo Orden sea Punto de Inflexión, debe verificarse que en dicho punto Cambie el sentido de la Concavidad y consecuentemente Cambie el Signo de la Segunda Derivada, manteniendo el signo de la derivada primera.

Dado que los **puntos críticos de segundo orden** de una función son los **posibles puntos de inflexión** y que estos nos permiten solucionar determinados problemas económicos, el fin principal de este herramental matemático en esta materia, veamos un ejemplo de aplicación en economía.

En Ciencias económicas existe un concepto muy importante que se llama la **Ley de los Rendimientos Decrecientes**, el cual se relaciona con estos conceptos de concavidad y punto de inflexión.

Ejemplo: Observa la gráfica que muestra la relación entre los costos de publicidad (x) y el ingreso por venta (y)



El comportamiento gráfico indica que el rendimiento producido por los ingresos por venta, está creciendo a una razón cada vez más rápida hasta x_0, pero a partir de allí una inversión más en publicidad comienza a producir rendimientos decrecientes.

A ese **Punto de Inflexión** en $(x_0, f(x_0))$ en **Economía** se lo llama **Punto de Rendimientos Decrecientes**.

El gráfico refleja que al comienzo un aumento en los gastos en publicidad, produce un incremento en los ingresos por venta que **Crecen** a un **Ritmo**

cada vez más **Rápido**. Pero a partir de $x = x_0$, un aumento en los gastos en publicidad ocasionan un incremento en los ingresos por venta, pero estos comienzan a **Crecer** a un **Ritmo** cada vez más **Lento**, ya que el **Ritmo** de **Crecimiento** está **Decreciendo**.

*Hasta aquí hemos aprendido que el signo de f'' nos permite concluir acerca de la concavidad que presenta una función, así como la existencia de puntos de inflexión. Ahora veremos que f'' también nos proporciona un criterio para localizar extremos locales o relativos, que anteriormente eran obtenidos a través del criterio de la derivada primera. Este nuevo procedimiento para la obtención de **Extremos Relativos** se lo conoce como **Criterio de la Segunda Derivada**.*

5.2.4. Criterio de la Segunda Derivada para la determinación de Extremos relativos.

Si $f''(x)$ es **Continua** en un intervalo abierto que contiene a x_0 y $\boxed{f'(x_0) = 0}$ entonces:

i. Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un **Máximo Relativo** en $x = x_0$

ii. Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un **Mínimo Relativo** en $x = x_0$

Observación:

Si $f''(x_0)=0$, el criterio anterior no concluye, por lo tanto para determinar si hay un extremo relativo en x_0 debemos recurrir al criterio de la primera derivada.

Ejemplo: Apliquemos el criterio de la segunda derivada para hallar los extremos relativos de: $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$

- Buscamos primero los números donde f' es cero:

$$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow x_1=3 \text{ y } x_2=-1$$

- Evaluamos f'' en los valores hallados:

$f''(x)=6x-6$

$f''(3)=6\cdot 3-6=12>0 \Rightarrow f$ tiene un Mínimo Relativo en $x=3$

$f''(-1)=6\cdot(-1)-6=-12<0 \Rightarrow f$ tiene un Máximo Relativo en $x=-1$

Concluimos que:

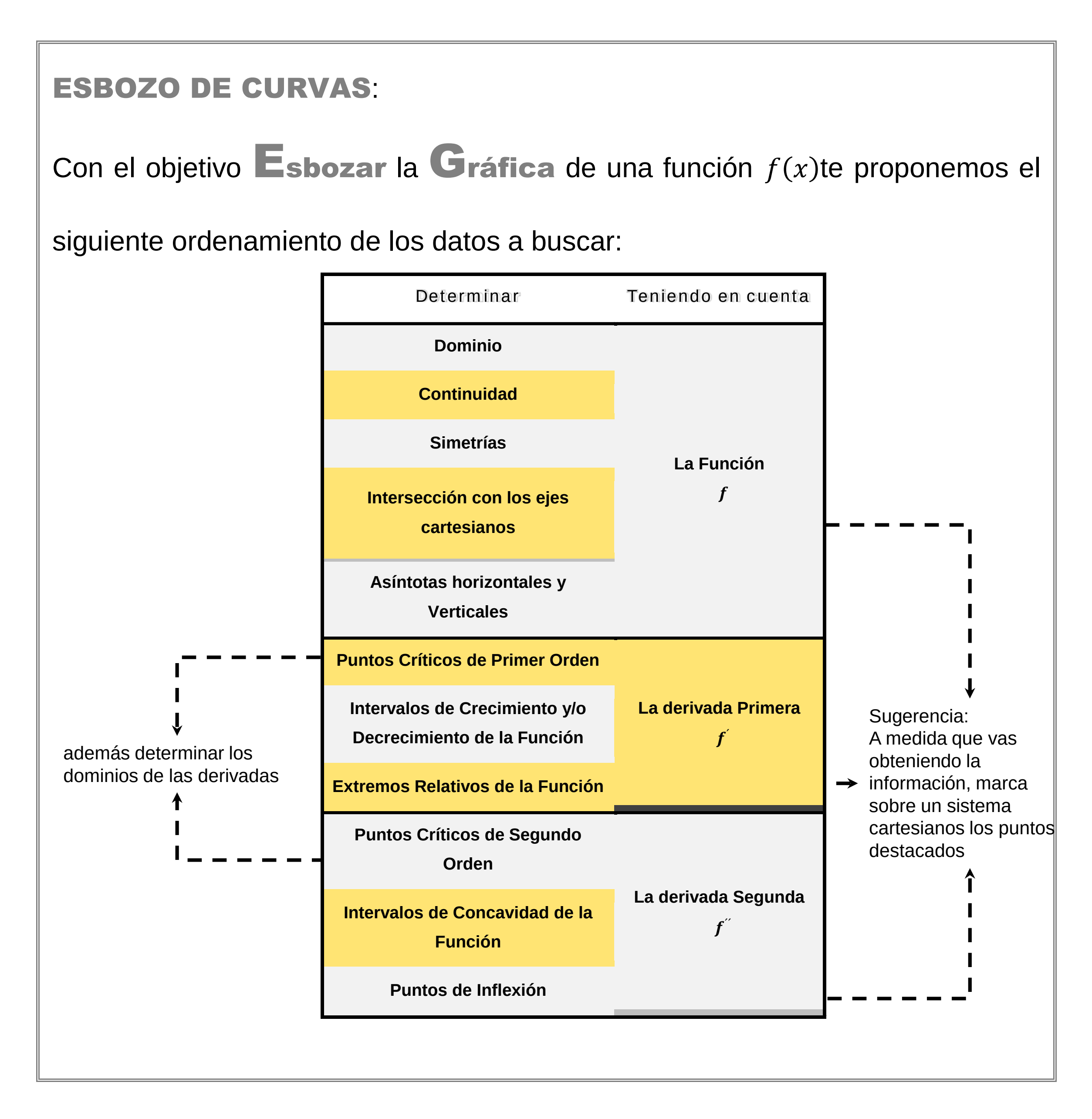
La **Función** $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$ tiene un **Mínimo Relativo** en $\boxed{x=3}$ que es $\boxed{f(3)=-19}$

La **Función** $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$ tiene un **Máximo Relativo** en $\boxed{x=-1}$ que es $\boxed{f(-1)=13}$

Resumen:

En esta unidad hemos profundizado en el análisis de funciones a través de las derivadas primera y segunda de la función. Este estudio de **Funciones de Variable Real** se lo conoce con el nombre de **Análisis Diferencial**

de $f(x)$. Se llama diferencial porque los **Signos** de las **Derivadas** **Primera** y **Segunda** de f, nos permite obtener información acerca del comportamiento de la función los que nos lleva a realizar junto con los visto en la unidad 3 sobre límite y continuidad de funciones a una representación ajustada del **Gráfico** de f.



ESBOZO DE CURVAS:

Con el objetivo **Esbozar** la **Gráfica** de una función $f(x)$te proponemos el siguiente ordenamiento de los datos a buscar:

Determinar	Teniendo en cuenta
Dominio	**La Función** f
Continuidad	
Simetrías	
Intersección con los ejes cartesianos	
Asíntotas horizontales y Verticales	
Puntos Críticos de Primer Orden	**La derivada Primera** f'
Intervalos de Crecimiento y/o Decrecimiento de la Función	
Extremos Relativos de la Función	
Puntos Críticos de Segundo Orden	**La derivada Segunda** f''
Intervalos de Concavidad de la Función	
Puntos de Inflexión	

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 10: Calcula los extremos relativos a través del criterio del signo de la segunda derivada para máximos y mínimos relativos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$
b) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
c) $f(x) = 5x - 9$

Actividad 11: Aplicando el criterio del signo de la segunda derivada, determina los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo y puntos de inflexión.

a) $f(x) = 3x - x^3$
b) $f(x) = -8x^2 + 3$
c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$

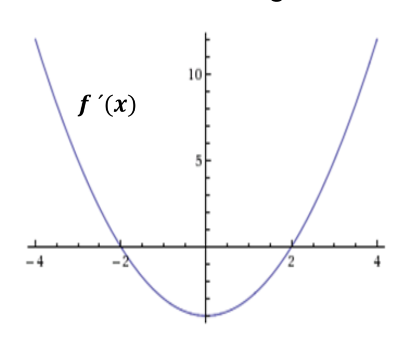
Actividad 12: Efectúa el análisis diferencial de las siguientes funciones, a través de los signos de *f ´* y de *f ´´*, y esboza su gráfica.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
b) $f(x) = cosx$ en el intervalo $[0,2\pi]$
c) $f(x) = x^4 - x^3$
d) $f(x) = x + \sqrt{x}$
e) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Puedes ayudarte con una tabla como la siguiente:

Intervalos Dom de *f*	Valor Prueba	Signo de *f ´*	Crec/Dec*f*	Signo de *f ´´*	Crec/Dec de *f ´*	Concavidad de *f*

Actividad 13: A través del gráfico de $f'(x)$, analiza crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión de f. Completa los datos en una tabla, como la sugerida.



Completa:

$f'(-2) =$ …… Luego, para $x = -2$, la función presenta ………………………………

$f'(2) =$ …… Luego, para $x = 2$, la función presenta ………………………………

$f''(0) =$ …… Luego, para $x = 0$, la función presenta ………………………………

Intervalos Dom de *f*	Valor Prueba	Signo de *f ´*	Crec/Dec*f*	Signo de *f ´´*	Crec/Dec de *f ´*	Concavidad de *f*
$(-\infty; -2)$						
$(-2; 0)$						
$(0; 2)$						
$(2; +\infty)$						

Actividad 14:.

a) Esboza el comportamiento gráfico de una función continua $f(x)$ en el intervalo [0,10], sabiendo que:

- $f'(5) = 0$; $f''(5) = 0$
- $f'(x) > 0$ en el intervalo $(0; 5) \cup (5; 10)$
- $f''(x) < 0$ en el intervalo $(0; 5)$ y $f''(x) > 0$ en el intervalo $(5; 10)$

b) Responde:

b1) ¿En qué intervalo la función crece a ritmo creciente?

b_2) ¿Qué presenta la función en x = 5?

Para responder las preguntas planteadas, puedes ayudarte completando los datos dados en la tabla:

Intervalos Dom de *f*	Signo de *f ´*	Crec/Dec*f*	Signo de *f ´´*	Crec/Dec de *f ´*	Concavidad de *f*

Actividad 15: Si $C(q) = \frac{q^3}{3} - 3q^2 + 12q$, es una función de Costo, encuentra cuándo es creciente el Costo Marginal, sabiendo que la capacidad diaria de producción es de 15 unidades.

Actividad 16:.Las ventas totales S, en miles de Euros, de la corporación de instrumentos de precisión Cannon se relaciona con la cantidad de dinero x que Cannon gasta en la publicidad de sus productos mediante la función:

$$S(x) = -0{,}002x^3 + 0{,}6x^2 + x + 500 \qquad 0 \leq x \leq 200$$

Donde x se mide en miles de Euros. Determina el punto de inflexión de la función S y analiza su significado.

UNIDAD VI:

DIFERENCIAL Y TEOREMAS DEL CÁLCULO

Índice

Unidad VI: Diferencial-Teoremas del Cálculo

Unidad VI

En esta unidad continuamos con el estudio de las aplicaciones del Cálculo Diferencial. Los conceptos que se desarrollan son Diferencial y Límite de Funciones, que ubicados en el Mapa Conceptual de la materia, el primero se desarrolla con el Análisis de la variación de una función y Aproximación de gráficos de funciones complejas, y el segundo con Límite de funciones indeterminados.

En la unidad 4 y 5 vimos que la expresión $\frac{dy}{dx}$ denota la derivada de la función, pero en algunos problemas es posible interpretar a dy y dx separadamente. En este contexto dy recibe el nombre de diferencial de y; análogamente, dx es la diferencial de x. El concepto de Diferencial es útil para el cálculo de errores cuando se efectúan mediciones.

En la unidad 5, también estudiamos optimización de funciones, y en esta unidad desarrollaremos otros procedimientos que nos permiten localizar extremos relativos en las mismas.

En la unidad III abordamos el concepto de Límite de funciones y vimos que pueden ser determinados o indeterminados, para este último caso desarrollaremos en esta unidad procedimientos más generales para evaluar estas situaciones, tales procedimientos se basan en la regla de L´Hospital o L’Hôpital.

bjetivos

General:

Aplicar el análisis diferencial de funciones a la solución de problemas y modelos matemáticos típicos de las Ciencias Económicas; mostrando una actitud analítica y reflexiva.

Específicos:

- ✓ **Comprender el concepto de diferencial de una función.**
- ✓ **Distinguir entre incremento absoluto de la función y el diferencial de una función**
- ✓ **Localizar extremos aplicando los Teoremas de Rolle y Valor Medio**
- ✓ **Resolver límites indeterminados a través de la Regla de L´Hopital**

6.1 Diferencial de una Función de variable real.

En muchas ocasiones necesitamos estimar la diferencia que existe al efectuar mediciones por ejemplo entre el valor real de una magnitud y su valor aproximado o al calcular variaciones de la variable dependiente cuando la variable independiente sufre una variación "pequeña". Estos conceptos nos llevarán al concepto de Diferencial de una Función en un Punto.

Deducción de la fórmula del Diferencial de una Función.

Para llegar a la misma comenzaremos recordando que la Variación Promedio que se produce en una función f sobre un intervalo $[x, x+\Delta x]$ lo obtenemos haciendo el cociente incremental:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow$ nos informa el **promedio de la variación** de f, dentro del intervalo considerado, **por cada unidad** de **variación de la variable independiente**

A su vez, el límite de ese cociente cuando $\Delta x \to 0$:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \Longrightarrow$ nos informa sobre la **variación instantánea** de f en un determinado momento de x.

Lo visto anteriormente nos permite afirmar que si Δx es **pequeño:**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

Se lee: **semejante a** e indica que no es igual sino **aproximado**

Ahora despejamos Δy de la expresión anterior y nos queda:

$$\boxed{\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x} \quad (1)$$

De esta manera hemos llegado a una **Fórmula** que nos permite **Aproximar** el **incremento absoluto** de la función: Δy, multiplicando el **ritmo instantáneo de cambio** en x por el **incremento de la variable independiente**.

Sabiendo que: $\frac{dy}{dx} = f^{'}(x)$ la expresión (1) nos queda que:

$$\boxed{\Delta y \approx f^{'}(x) \cdot \Delta x}$$

Al segundo miembro de la expresión anterior recibe el nombre de **Diferencial de una Función** y se lo denota por $\boxed{dy}$

Definición:

Sea $y = f(x)$ una función derivable en x, y sea Δx el cambio en x, entonces el **Diferencial** de y, que se denota dy, está dado por:

$$\boxed{dy = f^{'}(x) \cdot \Delta x}$$

Observación:

- El incremento de la variable independiente es igual a su diferencial. Es decir que $\Delta x = dx$. Observa que si $y = x$, su Diferencial por la definición es: $dx = 1 \cdot \Delta x \rightarrow \boxed{dx = \Delta x}$
- Entonces el Diferencial de una función también viene dado por:

$$\boxed{dy = f^{'}(x) \cdot dx}$$

Veamos un ejemplo en el que utilizaremos el concepto visto:

Ejemplo: Si el costo total de fabricar x litros de un producto es: $f(x) = 3x^2 + 5x + 10$ y el nivel actual de producción es de 40 litros. Se desea estimar el cambio en el costo total si se producen 40,5 litros

En primer lugar calculemos el incremento real que se produjo en el costo:

Cambio Real:

$$\boxed{\Delta y} = f(x + \Delta x) - f(x) = f(40{,}5) - f(40) = 5133{,}25 - 5010{,}0 = \boxed{123{,}30}$$

Aproximamos por Diferenciales:

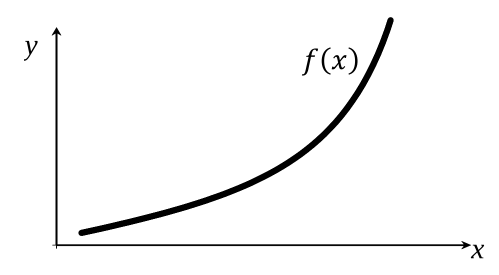
$$\boxed{dy} = f'(x)dx = (6x + 5) \cdot dx = (6.40 + 5).\,0{,}5 = \boxed{122{,}5}$$

En este ejemplo sencillo, probablemente no se advierta la ventaja de usar el diferencial como aproximación del cambio real, pero en expresiones analíticas más complicadas, suele resultar más simple calcular la derivada en un punto que calcular dos valores de la función y para luego restarlos.

Seguidamente, veremos gráficamente la interpretación geométrica del diferencial.

6.1.1 Interpretación Geométrica del diferencial.

En este apartado formalizamos geométricamente el Diferencial de una función. Tomemos una función $f(x)$ representada en el siguiente gráfico:



Y en él un punto x cualquiera por el cual trazamos su recta tangente que la llamamos L y los puntos S y Tsobre ella como lo muestra el siguiente gráfico.

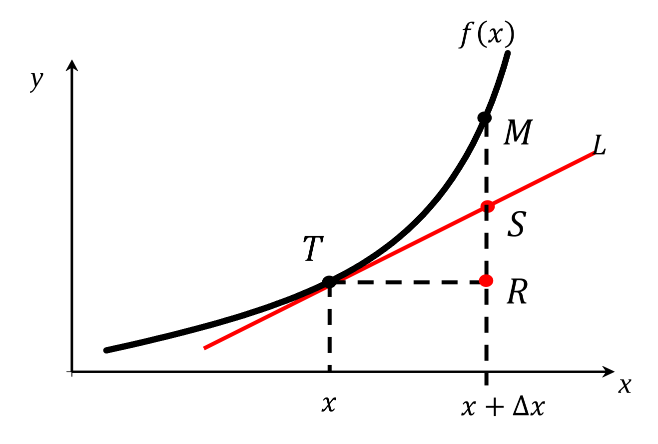


Figura 1

Sabemos por la Unidad 2 que la pendiente de cualquier recta es el cambio en la función dividido el cambio en la variable independiente. En particular si consideramos la recta tangente en el punto $x$que como lo muestra el gráfico anterior la llamamos L.

Tenemos que:

$$Pendiente\ de\ L = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{\overline{\mathrm{SR}}}{\overline{\mathrm{TR}}} = \frac{\overline{\mathrm{SR}}}{\Delta x} \qquad (3)$$

Pero a su vez por la Unidad 4 la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en x

$$Pendiente\ de\ L = f^{\prime}(x) \qquad (4)$$

Por (3) y (4) obtenemos que:

$$\frac{\overline{\mathrm{SR}}}{\Delta x} = f^{\prime}(x)$$

De donde despejando el segmento $\overline{SR}$ nos queda que:

$$\overline{SR} = f^{\prime}(x) \cdot \Delta x$$

Al observar en la figura 1 al segmento SR , nos permite afirmar que geométricamente el **Diferencial** de una **Función** es el **incremento de la ordenada de la recta tangente**, como lo muestra la figura 2

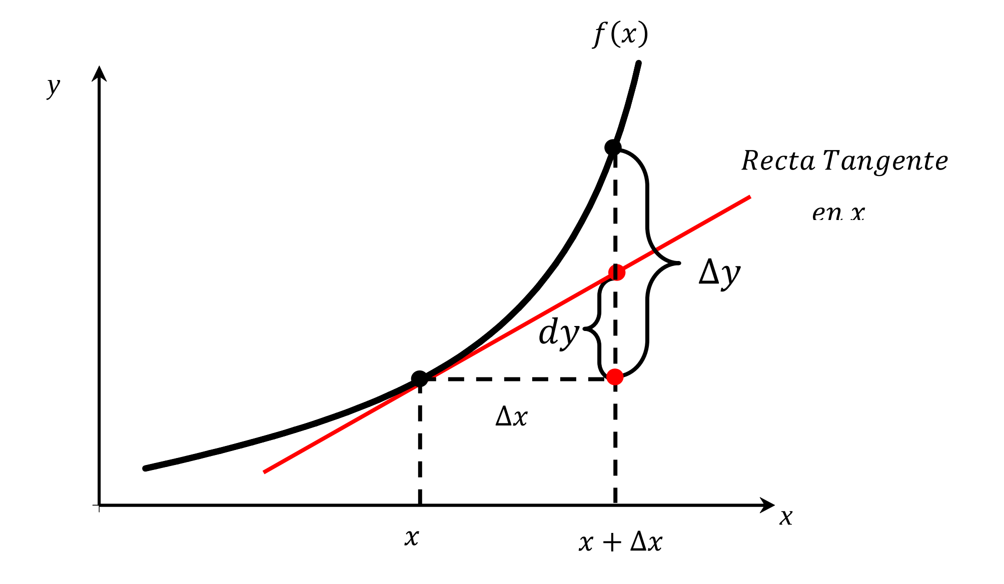
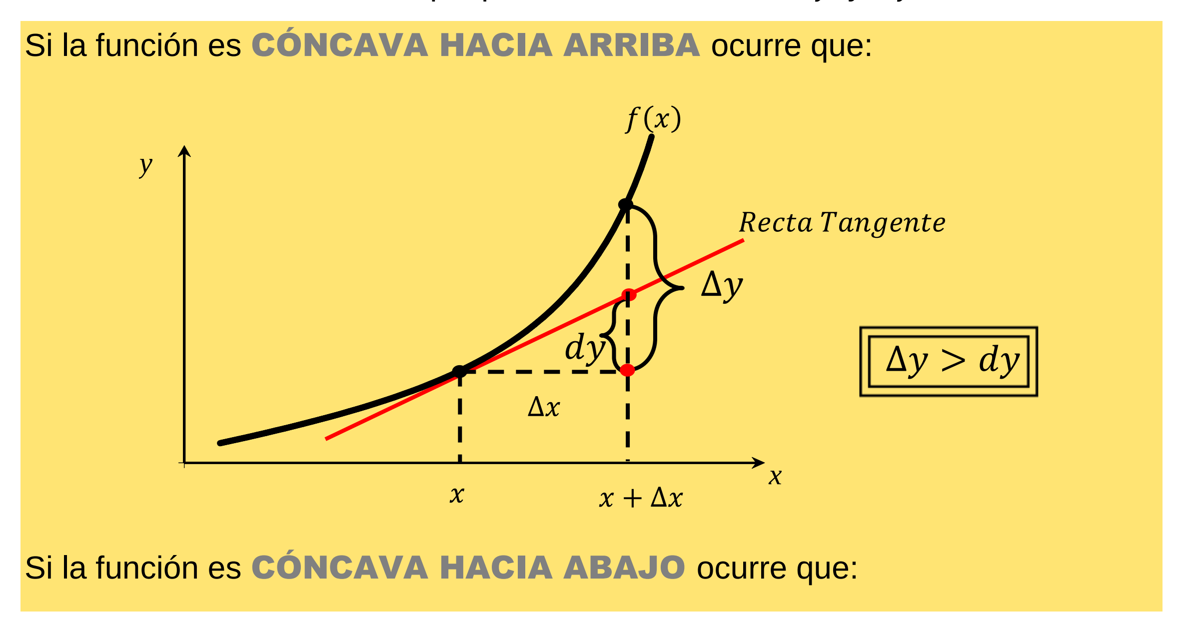


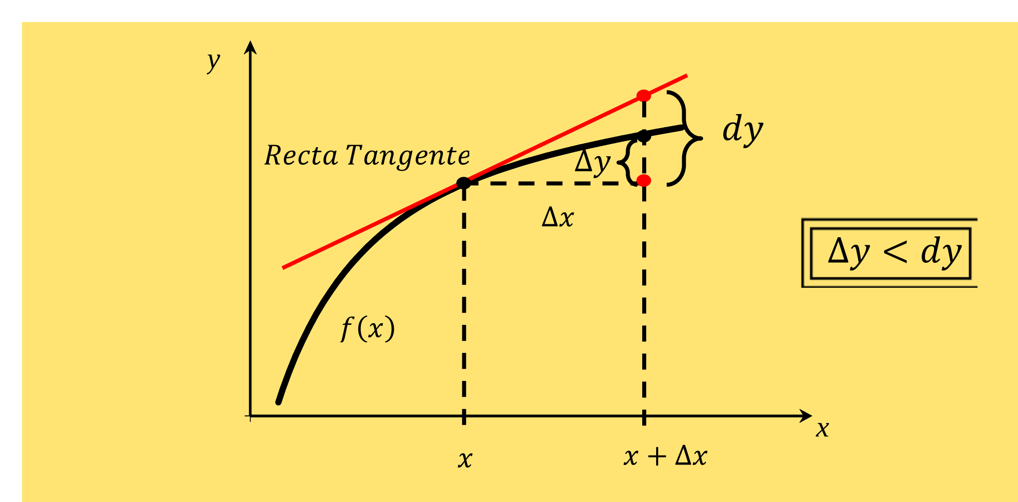
Figura 2

Observemos las relaciones que podemos hallar entre dy y Δy:

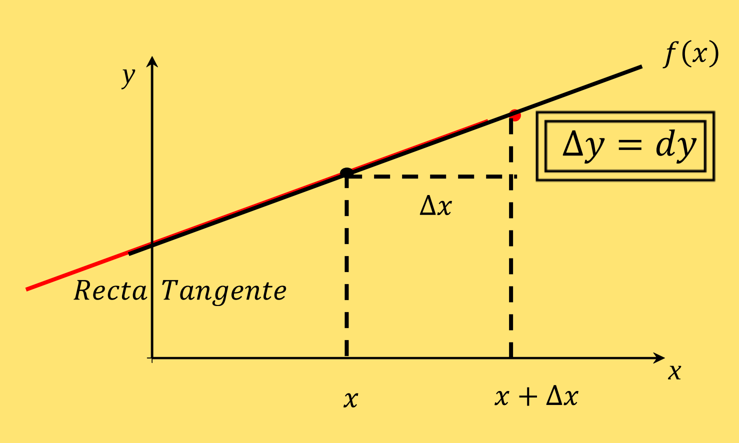
Si la función es **CÓNCAVA HACIA ARRIBA** ocurre que:



Si la función es **CÓNCAVA HACIA ABAJO** ocurre que:



Si la función es **LINEAL,** la recta tangente coincide con la función f(x) y ocurre que:



¿QUÉ APRENDIMOS?: RESOLVER-REPASAR

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 1: Dadas las siguientes funciones:

i) $f(x) = 2x^2 \quad (x = 1\ ;\ \ dx = 0{,}5)$

ii) $f(x) = x + 2 \quad (x = -2\ \ ;\ \ dx = 0{,}4)$

iii) $f(x) = \sqrt{x} \quad (x = 25\ \ ;\ \ dx = 0{,}1)$

a) Calcula gráfica y analíticamente el incremento absoluto y el diferencial para los valores dados de x y dx.

b) Completa las siguientes expresiones, teniendo en cuenta los resultados hallados en a)

-Si la función es cóncava hacia………………, el diferencial de la función es…………………que el incremento de la función.
-Si la función es lineal………………, el diferencial de la función es ………………… al incremento de la función.

(En todos los casos, se ha considerado un incremento positivo de la variable independiente)

Actividad 2: El Costo Total para un fabricante es:

$C(q) = 0.1q^3 - 0.5q^2 + 500q + 200$ dólares cuando el nivel de producción es q unidades. El nivel de producción actual es de 4 unidades, y el fabricante planea disminuirlo a 3.9 unidades. Estima, usando el concepto de diferencial, ¿cuánto cambiará el costo total?.

6.2. Teoremas de las Funciones Derivables.

En este apartado estudiaremos algunos teoremas que permiten localizar extremos relativos en funciones que cumplen determinadas condiciones. Estos teoremas establecen condiciones suficientes para la existencia de valores extremos. Es decir, si la función cumple ciertas condiciones (hipótesis) nos permite asegurar la existencia de extremos relativos o locales (Tesis).

6.2.1. Teorema de Rolle.

Enunciado:

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b).
Si $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un valor $c \in (a,b)$ para el cual se cumple que $f'(c) = 0$

Teorema de Rolle

Hipótesis:

f continua en $[a,b]$

f derivable en (a,b)

$f(a) = f(b)$

Tesis:

$\exists c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$

Demostración:

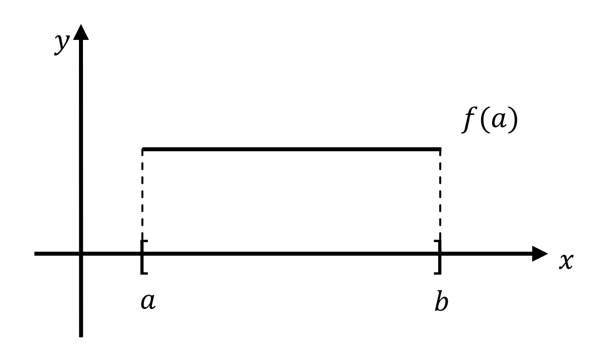
Puesto que la función f es continua en $[a,b]$, intervalo cerrado y acotado, alcanza en dicho intervalo un valor máximo y un valor mínimo.

Es decir, que el hecho de ser una función continua en un intervalo cerrado, esto nos asegura la existencia de extremos absolutos.

> **Recuerda de la Unidad 5:**
>
> **Extremos Absolutos en Intervalos Cerrados**:
>
> Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $f(x)$ alcanza un Máximo Absoluto y un Mínimo Absoluto sobre el Intervalo.

Distinguimos tres casos que se pueden presentar:

1er Caso: Tanto el máximo como el mínimo absoluto se presentan en los extremos del intervalo, o sea en a o en b. Pero como por hipótesis tenemos que $f(a) = f(b)$ el máximo y el mínimo coinciden. Luego, la única función que cumple con estas condiciones es una función constante en todo el intervalo, es decir que $f(x) = constante$ y su gráfica es del siguiente tipo:



Además, la derivada de una función constante es siempre cero, es decir no sólo en algún punto sino en todos los puntos del intervalo (a,b) es cero:

$$Si\ f(x) = cte \rightarrow f^{'}(x) = 0 \rightarrow f^{'}(c) = 0 \ \ \forall c \in (a,b)$$

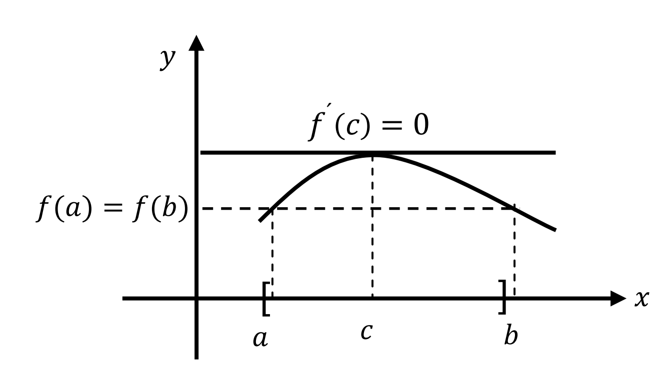
Que es lo que se quería demostrar (tesis).

2do Caso: Si f alcanza el máximo absoluto en un punto c distinto de los extremos del intervalo y como es derivable en c se cumple la condición necesaria para extremos relativos estudiada en la unidad 5, entonces $f'(c) = 0$.

> **Recuerda de la Unidad 5:**
>
> Condición Necesaria para Extremos Relativos:
>
> Si $f(x)$ alcanza un extremo relativo en $x = x_0$, entonces $\boxed{f'(x_0) = 0}$ o $\boxed{f'(x_0)\ no\ existe}$.

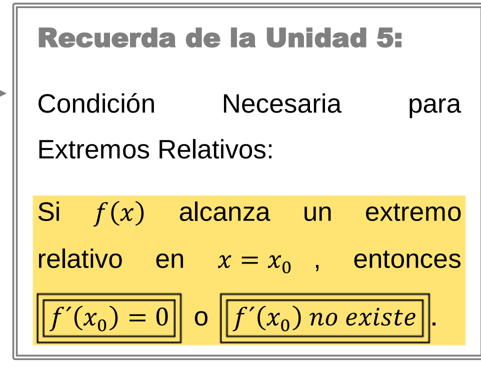
$$\left.\begin{array}{r} f \text{ derivable en } c \\ f \text{ tiene un máximo en } c \end{array}\right\} \quad f'(c) = 0$$

Gráficamente la situación sería:



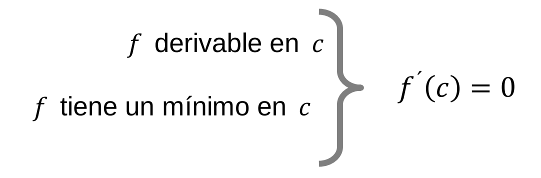
Observa que el hecho que la función alcanza un máximo en el interior del intervalo, determina que la función crece a la izquierda de c y decrece a la derecha de c,de manera de alcanzar en b el mismo valor que asumió en a, o sea $f(a) = f(b)$. En ese punto c la recta tangente es horizontal, por lo tanto su pendiente es nula.

3er Caso: Si f alcanza el mínimo absoluto en el interior del intervalo, razonamos como en el caso anterior. Es decir, si $f$alcanza el mínimo en un punto c distinto de los extremos del intervalo y como es derivable en c se cumple la condición necesaria para extremos relativos estudiada en la unidad 5, entonces $f'(c) = 0$.

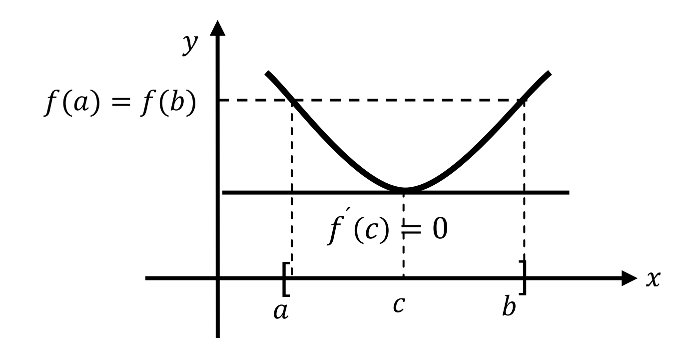

Recuerda de la Unidad 5:

Condición Necesaria para Extremos Relativos:

Si $f(x)$ alcanza un extremo relativo en $x = x_0$, entonces $\boxed{f'(x_0) = 0}$ o $\boxed{f'(x_0)\ no\ existe}$.



Gráficamente la situación sería:



Observa que el hecho que la función alcanza un mínimo en el interior del intervalo, determina que la función decrece a la izquierda de c y crece a la derecha de c,de manera de alcanzar en b el mismo valor que asumió en a, o sea $f(a) = f(b)$. En ese punto c la recta tangente es horizontal, por lo tanto su pendiente es nula.

Geométricamente, este teorema nos dice, que en toda función continua en un intervalo cerrado, derivable en el intervalo abierto y cuando la función en los extremos coincide, **Existe al Menos** un valor en el intervalo, donde la recta tangente a la curva en esos puntos es paralela al eje x, es decir, horizontal.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^3 - x$, queremos comprobar las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$ y hallar el o los valores para los cuales la función cumple con la tesis.

Comprobar las hipótesis del teorema de Rolle significa determinar si dicha función es continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$.

Entonces como $f(x) = x^3 - x$ es una función polinómica, es continua y derivable para todo número real, en particular es continua en el intervalo $[-1;1]$ y derivable en el intervalo abierto $(-1;1)$.

Ahora verificaremos o comprobaremos que $f(a) = f(b)$. En este caso:

$$\left.\begin{array}{c} f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0 \\ \text{y} \\ f(1) = (1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad f(-1) = f(1) = 0$$

Como se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle $\exists\ c \in (-1;1) /\ f'(c) = 0$

Ahora para hallar el o los valores de $c \in (-1{,}1)$, siendo $f(x) = x^3 - x$, debemos obtener:

$f'(x) = 3x^2 - 1$, así resulta que:

$$f'(c) = 3c^2 - 1 = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{despejamos\ c} c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \Bigg\} \begin{array}{l} c_1 = +0{,}58 \\ c_2 = -0{,}58 \end{array}$$

Y tanto $c_1 = +0{,}58$ como $c_2 = -0{,}58$ pertenecen al intervalo $(-1{,}1)$. Por lo tanto para esos valores se cumple la tesis del teorema de Rolle.

En el teorema de Rolle que acabamos de ver, impusimos la condición de que $f(a) = f(b)$, por lo que la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene la misma pendiente que la recta tangente en c, al ser ambas paralelas.
Si generalizamos esto último, sin imponer la condición de que $f(a)$ sea igual a $f(b)$, es posible ver que también se verifica que la recta secante que pasa por $(a, f(a))$, $(b., f(b))$ tiene la misma pendiente que la recta tangente a la curva en un punto c comprendido dentro del intervalo.
Esta afirmación es una generalización del Teorema de Rolle, que se denomina Teorema del Valor Medio o Teorema de Lagrange.

6.2.2. Teorema del Valor Medio.

Enunciado:

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe un valor $c \in (a, b)$ para el cual se cumple que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teorema del Valor Medio

Hipótesis:

f continua en $[a, b]$

f derivable en (a, b)

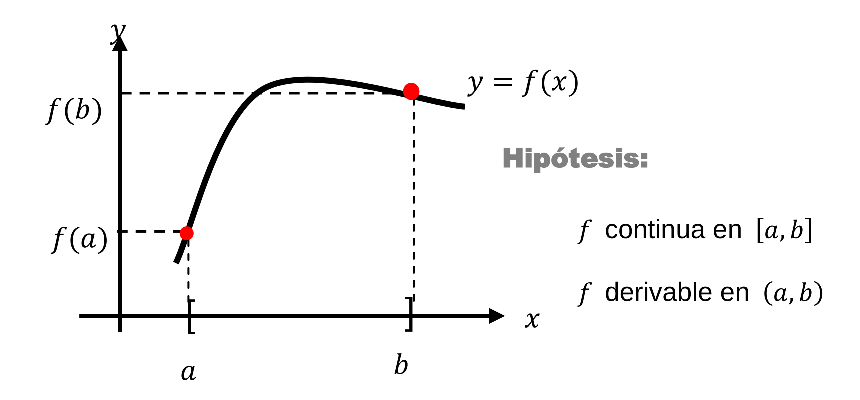
Tesis:

$$\exists c \in (a, b) \;/\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

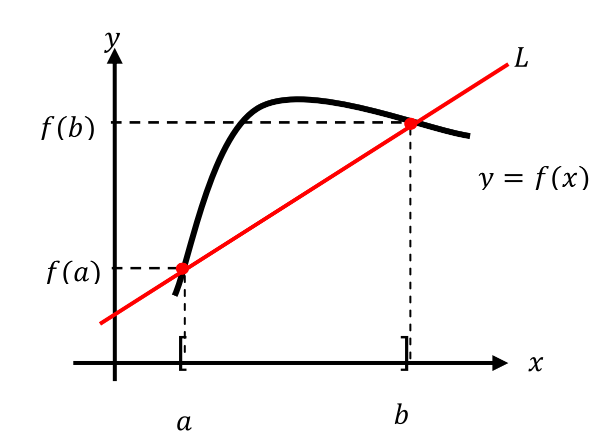
Antes de ver la demostración del teorema vamos a construir e interpretar geométricamente el teorema del Valor Medio (T.V.M).

Demostración Geométrica:

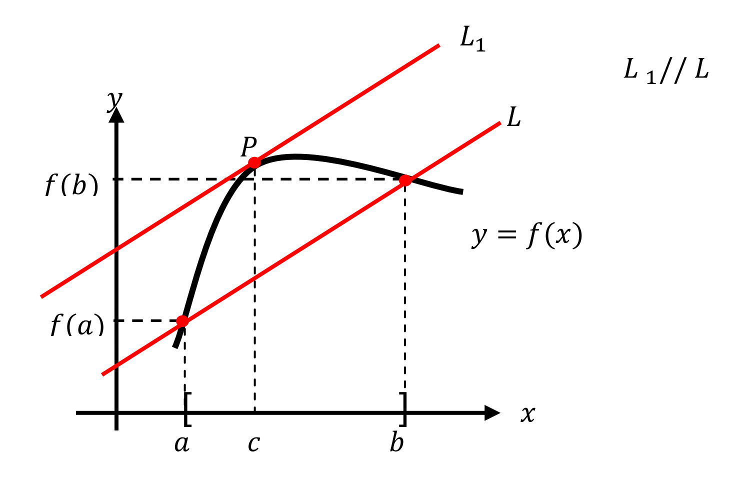
Para realizar la construcción geométrica del T.V.M, consideramos una función $y = f(x)$ que satisface las hipótesis del teorema como se muestra en el siguiente gráfico:



y trazamos una recta L, secante a la curva que pase por dos puntos de coordenadas conocidas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:



Luego trazamos la recta L_1, paralela a L, y que sea tangente a la curva en $x = c$:



Como L y L_1, son paralelas, tienen la misma pendiente., por lo tanto podemos afirmar que:

$$Pendiente\ de\ L = Pendiente\ de\ L_1$$

Pero la pendiente de L_1 por ser la derivada de la función en el punto P de abscisa $x = c$ es:

$$Pendiente \quad de \quad L_1 = f'(c) \qquad (1)$$

Y la pendiente de L por definición es:

$$Pendiente\ de\ L = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (2)$$

Luego como los primeros miembros de (1) y (2) son iguales, los segundos también lo son. Entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Esta construcción gráfica nos muestra geométricamente lo que establece el teorema del valor medio:

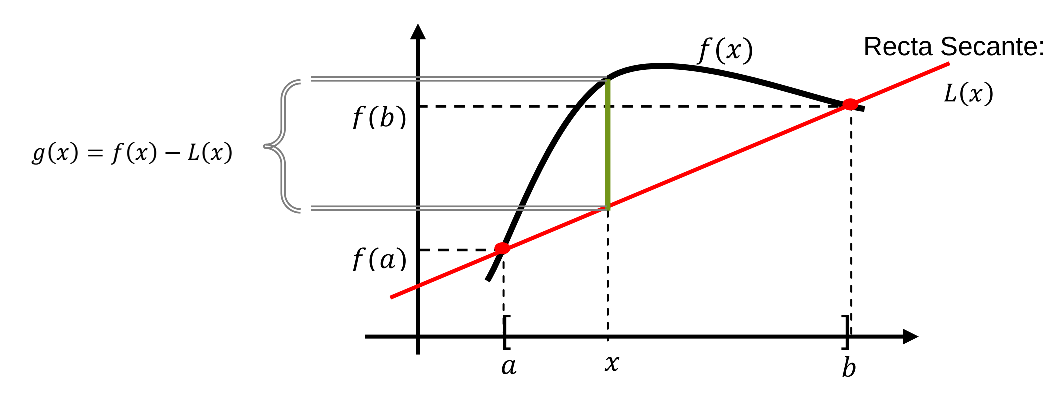
Existe un punto sobre la curva en el cual la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Ahora si estamos en condiciones de demostrar analíticamente el teorema:

Demostración:

La demostración del teorema consiste básicamente en dos pasos:

1ro: Definimos una función auxiliar que la llamamos $g(x)$ la cual mide la distancia vertical que existe entre la curva $f(x)$y la recta secante $L(x)$que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:



Por lo tanto la función auxiliar es:

$$\boxed{g(x) = f(x) - L(x)}$$

Donde la recta secante que pasa por el punto $(a, f(a))$ tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{L(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a)}$$

Por la unidad 2, sabemos que la forma punto–pendiente de la ecuación de la recta es:

$y - y_0 = m(x - x_0)$,

entonces:

$$\boxed{y = m(x - x_0) + y_0}$$

Y que $m = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Y el par $(x_0, y_0) = (a, f(a))$

Luego, reemplazando $L(x)$ en la función $g(x)$por la ecuación de la recta hallada a través de la fórmula punto pendiente podemos escribir:

$$\boxed{g(x) = f(x) - L(x) = f(x) - \left\{\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a)\right\}}$$

2do: **Aplicamos el teorema de Rolle a la función**$g(x)$, para hallar el valor extremo.

La función $g(x)$ hallada en el paso 1 cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$, pues la resta de dos funciones continuas en un intervalo cerrado es también continua en $[a, b]$ por propiedad de combinación de funciones vistas en la unidad 3 y también derivable en (a, b) donde su derivada es:

$$g^{\prime}(x) = f^{\prime}(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Además, verifica que $g(a) = g(b)$ ya que:

$$\left.\begin{array}{c} g(a) = f(a) - \left\{\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](a - a) + f(a)\right\} = f(a) - 0 - f(a) = 0 \\ \text{y} \\ g(b) = f(b) - \left\{\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](b - a) + f(a)\right\} = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \end{array}\right\} g(a) = g(b)$$

Por lo tanto cumple la tesis: $\exists c \in (a, b)\ tal\ que\ g^{\prime}(c) = 0$. Es decir que existe un valor c en el intervalo abierto (a, b), tal que la derivada primera se anula:

$$g^{\prime}(c) = f^{\prime}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f^{\prime}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

De donde se deduce que:

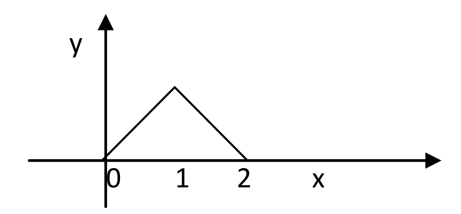
$$f^{\prime}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Que era lo que se quería demostrar.

¿QUÉ APRENDIMOS?: RESOLVER-REPASAR

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 3: Dada la función:



Justifica si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0;\ 2]$ y si es posible, encuentra los valores que satisfagan el teorema.

Actividad 4: El beneficio de un fabricante en la venta de lapiceras viene dado por la función $B(x) = -400x^2 + 6800x - 12000$, donde x es el precio al que se venden las lapiceras. Sabiendo que el precio posible de venta está comprendido entre 2 y 15 y que en dichos valores extremos el beneficio es nulo, utiliza el Teorema de Rolle para hallar el valor extremo de la función.

Actividad 5: Determina si la siguiente función satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo indicado. Luego, si es posible, encuentra todos los valores "c" que satisfagan la conclusión del mismo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $[1;2]$

Actividad 6: Se sabe que la función Costo Total de una empresa, al producir x unidades de un producto, viene dada por $C(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}1x + 8$. ¿Para qué nivel de producción del intervalo $[4,6]$, el cambio promedio en el costo es igual al cambio instantáneo en el mismo?

A continuación enunciaremos un teorema que es la generalización del Teorema del Valor Medio, por eso en algunos libros lo encontraran con el nombre de "Teorema del Valor Medio Generalizado", aunque frecuentemente se lo llama Teorema de Cauchy

6.2.3. Teorema de Cauchy. Enunciado.

El teorema Cauchy en esta asignatura es de interés teórico, por lo que lo enunciaremos sin demostración, dando paso a la regla de L´Hospital, que demostraremos en el párrafo siguiente, debido a su extraordinaria utilidad para el cálculo de límites.

Teorema de Cauchy:

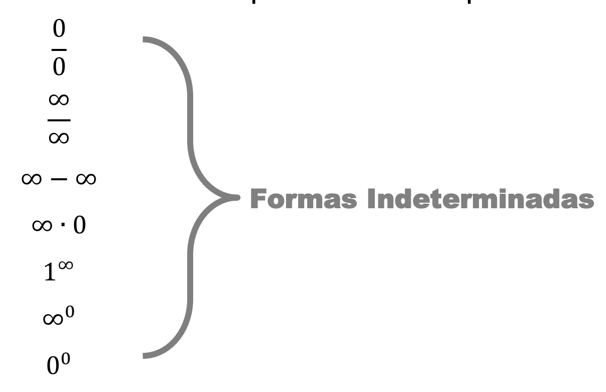
Si f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$, para el cual:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ahora sí estamos en condiciones de estudiar:

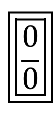
6.2.4. Formas Indeterminadas: La regla de L´Hospital.

Cuando estudiamos el concepto de límite advertimos que había situaciones que no podíamos resolver con las herramientas que disponíamos en ese momento.
Eran límites que nos llevaban a expresiones del tipo:



en esa oportunidad dijimos que utilizaríamos herramientas del cálculo diferencial para poder resolverlas.
Una de las herramientas más útiles para hallar límites en expresiones indeterminadas lleva el nombre de **REGLA DE L´HOSPITAL.**

La regla de L'Hospital es un procedimiento analítico basado en el cálculo de derivadas que permite determinar el verdadero valor de la forma indeterminada:



REGLA DE L'HOSPITAL:

Enunciado:

Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado y derivables en el intervalo abierto que contiene a un punto c.
Si $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = 0$, $\lim_{x\to c} g(x) = g(c) = 0$ y existe el $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es:

Regla de L´Hospital

Si $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

y $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En palabras:

La regla de L´Hospital dice que, dadas dos funciones f y g continuas y derivables en $x=c$, de manera que $f(c)=0$ y $g(c)=0$, entonces el límite cuando x tiende a c del cociente entre $f(x)$ y $g(x)$ es igual al límite cuando x tiende a c del cociente de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$, siempre que este límite exista. Esto que pareciera un tanto complicado tiene una representación matemática sencilla:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

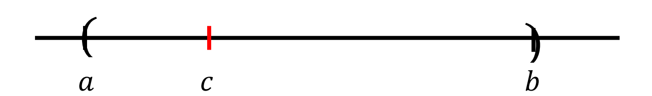
Atención:

Un error muy frecuente al calcular un límite mediante la regla consiste en aplicar la fórmula de la derivada del cociente. Recuerda siempre que la regla de L'Hospital utiliza el **cociente de las derivadas** y no la derivada del cociente. Es decir que:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$$

Demostración:

Por hipótesis sabemos que tanto f como g son funciones derivables en un intervalo abierto que contiene a c, llamemos a ese intervalo abierto (a,b). Es decir que $a<c<b$ .Gráficamente la situación sería:



Y consideremos un subintervalo abierto (c, x) contenido en (a, b) o sea:

Ahora como f y g son funciones derivables en el intervalo (a, b) por hipótesis, implica por lo visto en la unidad 4, que f y g son funciones continuas en (a, b). Luego, podemos afirmar que f y g son continuas en el intervalo cerrado $[c, x]$ y derivable en el abierto (c, x).

Por lo tanto f y g cumplen con las hipótesis del Teorema de Cauchy en el intervalo $[c, x]$, entonces $\exists x_0 \in (c, x)$tal que:

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Además por hipótesis tenemos que $f(c) = 0$ y $g(c) = 0$. Luego la expresión anterior queda:

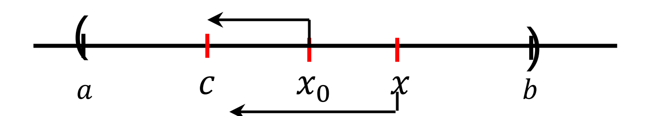
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Teorema de Cauchy:

Si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$, para el cual:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Y como cuando $x \to c$ también $x_0 \to c$, pues x_0 es un punto interior del intervalo (c, x):



Por lo tanto:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0 \to c} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Pues en el límite x_0 se comporta igual a x, por eso podemos reemplazar x_0 por x. Y así queda demostrado que:

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

De la forma que hemos expuesto, la regla de L´Hospital sólo sería válida para límites cuando la variable tiende a una constante ($x \to c$) de indeterminaciones del tipo: $\frac{0}{0}$. Pero su campo de aplicación se puede ampliar notablemente, pues también es válida para indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Y más aún, la regla también es aplicable cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$

CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LA REGLA DE L'HOSPITAL

1$^{\boldsymbol{ero}}$: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

Si la variable x tiende a ∞ en lugar de tender a un valor finito c, también es posible aplicar la regla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f^{´}(x)}{g^{´}(x)}$$

Demostración:

La idea es transformar la variable para poder aplicar la regla de L´Hospital. Dado que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

Sustituimos la variable por: $x = \frac{1}{u}$. Luego cuando $x \to \infty$ la $u \to 0$, pues si $x \to \infty$, $\frac{1}{u} \to \infty$ y $u \to 0$.

De esta forma el:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{0}{0}$$

Ahora si podemos aplicar la regla ya que la nueva variable u tiende a un valor finito ($c = 0$).

Por lo tanto obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)}\underbrace{=}_{L'H}\lim_{u\to 0}\frac{\left[f\left(\frac{1}{u}\right)\right]'}{\left[g\left(\frac{1}{u}\right)\right]'}=\lim_{u\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)}\underbrace{=}_{\substack{simplificamos\\ \left(-\frac{1}{u^2}\right)}}\lim_{u\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)}$$

Ahora nuevamente reemplazamos la variable $\frac{1}{u}$ por x y nos queda:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

2^{do}: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

Demostración:

Vamos a transformar el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ en el cociente $\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$, de esta manera la indeterminación se transforma en: $\frac{0}{0}$ y de esta forma podemos aplicar la regla del L´Hospital:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to c}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\overbrace{\underbrace{=}_{\frac{0}{0}}}^{L'H}\lim_{x\to c}\frac{\left(-\frac{1}{(g(x))^2}\right)\cdot g'(x)}{\left(-\frac{1}{(f(x))^2}\right)\cdot f'(x)}$$

Ahora resolvemos el cociente, haciendo el producto de extremos por medios y sabiendo que menos dividido menos es +, nos queda:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{(f(x))^2\cdot g'(x)}{(g(x))^2\cdot f'(x)}\underbrace{=}_{\substack{por\ propiedades\\ de\ límite}}\lim_{x\to c}\frac{(f(x))^2}{(g(x))^2}\cdot\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Despejando el $\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}$, pasando el primer factor dividiendo al primer miembro nos queda:

$$\frac{\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}}{\lim\limits_{x\to c}\frac{\left(f(x)\right)^2}{\left(g(x)\right)^2}}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to c}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{\left(f(x)\right)^2}{\left(g(x)\right)^2}}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Simplificando en el primer miembro:

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Tomando la recíproca en ambos miembros:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Con lo que se demuestra que la regla de L'Hospital también es aplicable a las formas indeterminadas $\frac{\infty}{\infty}$.

jemplo: Se desea calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-sen\,x}$

Para ello procedemos de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\operatorname{sen}x}\underbrace{\overset{L'H}{\triangleq}}_{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}\underbrace{\overset{L'H}{\triangleq}}_{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\operatorname{sen}x}\underbrace{\overset{L'H}{\triangleq}}_{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x}=6$$

De este modo tuvimos que aplicar tres veces la regla de L´Hospital para determinar el límite.

Atención:

como se observa en el cálculo del límite anterior, se obtiene reiteradas veces una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$; la regla de L'Hospital se aplica tantas veces como sea necesaria (hasta levantar la indeterminación).

Resumen para resolver ejercicios prácticos:

Los límites del tipo:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \quad (donde\ c\ es -\infty, +\infty\ o\ un\ número)$$

Si dan lugar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, pueden obtenerse derivando numerador y denominador y calculando, si existe, el límite del cociente de sus derivadas.

Con frecuencia, después de aplicar por primera vez la regla de L´Hospital, se llega a otra indeterminación, por lo que se debe repetir el proceso hasta salvar la indeterminación.

¿QUÉ APRENDIMOS?: RESOLVER-REPASAR

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 7: Calcula los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôspital:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{2.(x-3)}{x^2-9}$

b) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen x}}{\text{Ln (x+1)}}$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2x}}{sen\left(\frac{2}{x}\right)}$

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+1}{3x^2-5}$

f) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{2e^x}$

g) $\lim_{x\to 0^+}\frac{Ln\ (sen\ x)}{Ln\ (tg\ x)}$

h) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

i) $\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(2e^x-2)}{ln x}$

j) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ln(3x+1)}{ln(x^2-4)}$

Seguidamente veremos que expresiones del tipo $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0 *con cierta habilidad se pueden poner en forma de cociente para que se les pueda aplicar la regla del L´Hospital.*

Ampliación de la regla de L´Hospital.

Para las siguientes indeterminaciones no daremos una demostración pero sí una idea de cómo transformar las funciones en cocientes para poder aplicar la regla de L´Hospital:

$a)\qquad \lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$

Para poder aplicar la regla es necesario realizar previamente una transformación algebraica con la diferencia de funciones.

$$f(x)-g(x)\underbrace{=}_{\substack{multiplicamos\\ y\ dividimos\ por\\ f(x)\cdot g(x)}}(f(x)\cdot g(x))\cdot\left(\frac{f(x)-g(x)}{f(x)\cdot g(x)}\right)\underbrace{=}_{\substack{transformamos\\ este\ producto\ en\\ cociente}}\frac{\frac{f(x)-g(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

Ahora en el numerador de este último cociente distribuimos denominador, así:

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{f(x)-g(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}=\frac{\frac{f(x)}{f(x)\cdot g(x)}-\frac{g(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\underbrace{=}_{simplificamos}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

De esta forma la diferencia de funciones se puede escribir como:

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

Llevando esta transformación algebraica al cálculo del límite a resolver:

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to c}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}=\frac{0}{0}$$

El haber llegado a este tipo de indeterminación nos permite aplicar la regla de L´Hospital

$b)$ $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=\infty\cdot 0$ ó $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=0\cdot\infty$

En estos casos para aplicar la regla, es también necesario realizar una transformación algebraica con el producto de las funciones.

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad ó\quad \lim_{x\to c}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{0}{0}\ ó\ \frac{\infty}{\infty}$$

De este modo se llega a una indeterminación que ya sabemos resolver aplicando la regla.

Por último veremos como se aplica la regla cuando se presentan las indeterminaciones exponenciales: 1^{∞} *;* ∞^{0} *;* 0^{0}

$c)$ $\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)}=1^{\infty}$ en donde $\lim_{x\to c}f(x)=1$ y $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$

$\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)}=\infty^{0}$ en donde $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to c}g(x)=0$

$\lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)}=0^{0}$ en donde $\lim_{x\to c}f(x)=0$ y $\lim_{x\to c}g(x)=0$

Para resolver cualquiera de estas indeterminaciones aplicamos logaritmos naturales sobre la función y tomamos límite para cuando x tiende a c.

$$ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\cdot ln\,f(x)$$

Tomando límite a ambos miembros de la igualdad:

$$\lim_{x\to c} ln[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to c}\left[g(x)\cdot ln\,f(x)\right]$$

Como el límite del logaritmo es igual al logaritmo del límite:

$$ln \lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to c} [g(x) \cdot ln\, f(x)]$$

El segundo miembro puede calcularse fácilmente pues nos ha quedado planteado una indeterminación $\infty \cdot 0$ ó $0 \cdot \infty$ que ya sabemos resolver.

$$ln \lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to c} [g(x) \cdot ln\, f(x)] = \lim_{x \to c} \frac{ln\, f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ó } \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{\frac{1}{ln\, f(x)}} = L$$

Luego, aplicamos la regla de L´Hospital y obtenemos que:

$$ln \lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)} = L$$

Como el logaritmo natural es el logaritmo en base e, aplicamos definición de logaritmo y nos queda:

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)} = e^L$$

Ejemplo: Calcular el siguiente límite aplicando la regla de L´Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \left(x + e^5\right)^{\frac{1}{x}} = \infty^0$$

Se considera la función, cuyo límite se desea calcular, de la siguiente manera:

Sea:

$$y = \left(x + e^5\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$ln\, y = ln\left(x + e^5\right)^{\frac{1}{x}}$$ (se aplica ln miembro a miembro)

$$ln\, y = \frac{1}{x} \cdot ln\left(x + e^5\right)$$ por propiedad de logaritmo

Tomando límite en ambos miembros:

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot \ln\left(x+e^5\right)\right]_{0\cdot\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+e^5\right)}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+e^5}\cdot 1}{1} = 0$$

De esta forma, si se observa los miembros extremos y se reemplaza "y" por su definición, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(x+e^5\right)^{\frac{1}{x}} = 0 \underset{\substack{por\ prop.\\ de\ \text{límite}}}{\leftrightarrow} \ln \lim_{x\to\infty}\left(x+e^5\right)^{\frac{1}{x}} = 0 \underset{\substack{por\ \text{def.}\\ \text{de ln}}}{\leftrightarrow} e^0 = \lim_{x\to\infty}\left(x+e^5\right)^{\frac{1}{x}}$$

Luego:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(x+e^5\right)^{\frac{1}{x}} = 1}$$

¿QUÉ APRENDIMOS?: RESOLVER-REPASAR

Te proponemos una serie de actividades para reforzar e integrar lo estudiado.

Actividad 8: Calcula los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôspital:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x.Ln\, x)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x.\, sen\ \frac{2}{x})$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\ 3\text{x}.\, e^{\frac{2}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\ \frac{1}{\text{x}}.\ \text{Ln}\ (1+\text{x})$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\ x^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\text{x}}\right)^{\text{sen x}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{\text{x}}\right)^{3\text{x}}$

h) $\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$

i) $\lim_{x\to 0^+} (x)^x$

j) $\lim_{x\to 0} (5x)^{x^2}$

k) $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}\right)$

l) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{4}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$

m) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2x}\right)$

n) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

BIBLIOGRAFÍA

BUDNICK, Frank. Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales". Tercera Edición. Editorial Mc Graw Hill. (1997).

EDWARDS Bruce H.,HOSTETLER Robert, LARSON Ron “Cálculo Análisis Matemático” Editorial Cengage Learning. (2010)

EDWARDS Jr., C. H. y PENNEY David E. "Cálculo y Geometría analítica". Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S:A: (1996).

GUZMAN Miguel de ; COLERA José; SALVADOR, Adela "Matemáticas I” Editorial Anaya. (1991).

GUZMAN Miguel de; COLERA José; SALVADOR, Adela "Matemáticas". Bachillerato 2. Editorial. Anaya. (1991).

HAEUSSLER, E y Paul, Richard. Matemáticas para administración y economía". Segunda edición. Editorial. Iberoamericana. (1987)

HOFFMAN, Laurence D. "Cálculo aplicado para administración, economía, contaduría y ciencias sociales". Mc Graw Hifl.(1990)

LARSON, R; HOSTETLER, R; Edwars, B. "Cálculo y Geometría analítica". Sexta Edición. Editorial Mc Graw Hill.(1999)

LIAL, Margaret L.; HUNGERFORD; Thomas, B. Matemáticas para Administración y Economía ".Séptima edición. Editorial. Prentice Hall.(2000).

PURCELL Edwin J. y VARBERG Dale, "Cálculo con geometría analítica". Sexta Edición. Editorial. Prentice Hall (1993)

WEBER Jean E. “Matemáticas para Administración e Economía” Editorial Harla Cuarta Edición (1982)

WRIGHT WARREN S.,ZILL DENNIS G. “Cálculo de una Variable” Editorial MCGRAW-HILL Edición (2011).

ZILL, Dennis. "Cálculo con geometría analítica". Editorial Iberoamérica.(1985).

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Graciela Recabarren, Carlos Marchesini, Susana Panella, Silvia Butigué, Silvia Cabrera, Nancy Scattolini, Sonia Curti, Martha Lardone, Susana Mussolini y María Inés Herrera

Los contenidos que veremos en esta asignatura, te permitirán utilizar la matemática en la descripción, análisis y resolución de problemas en el área de las Ciencias Económicas.

Comprobarás que la matemática te brinda herramientas muy útiles para la selección y organización de la información necesaria para la toma de decisiones. Disponer de información no es un problema en los tiempos que vivimos.

La dificultad se presenta cuando necesitamos analizar ese cúmulo de información, seleccionar la que realmente aporta datos útiles, ordenarla y relacionarla de manera que nos oriente acerca del problema que queremos resolver.

La vida cotidiana nos enfrenta permanentemente a situaciones que requieren tomar una decisión respecto de algo. A diario debemos evaluar distintas alternativas para poder optar por la que, en el contexto en que se presenta, aparenta ser la más conveniente.

El ANÁLISIS MATEMÁTICO nos ayudará en situaciones en las que, por ejemplo, queramos evaluar la relación que existe entre ingresos de un fabricante con las cantidades vendidas o costos de fabricación con beneficios obtenidos o precio de un artículo con su demanda, etc. Dado que las Ciencias Económicas, frecuentemente tratan conceptos de naturaleza cuantitativa, como lo son los precios, salarios, utilidades, etc., es indudable que gran parte del análisis económico será ineludiblemente matemático.

ISBN 978-987-688-077-0